

تم بيع أكثر من ٣٠ مليون نسخة من ملخصات شوم!

# حساب المثلثات

ملخصات  
إيزي شوم

- يغطي جميع أساسيات المنهج
- يحتوي على الكثير من المسائل المحولة حلاً كاملاً
- أفضل وسيلة دقيقة وموجزة لمساعدة الطالب على التفوق والنجاح



أيرز  
موير

الدار الدولية للاستشارات الثقافية ش.م.ع. ٢٠٢٠

مصر



# حساب المثلثات

المؤلف

د. فرانك أيرز

د. روبرت فوير

محرر الموجز

د. جورج ج. هادمينوس

ترجمة

مهندس / سعيد فرج إسكندر

مهندس بالتعليم الفنى

مراجعة

د. / إنتصارات محمد حسن الشيكى

أستاذ الرياضيات البحتة ورئيس القسم السابق

كلية علوم - جامعة عين شمس

---

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.ب.

مصدر

## حقوق النشر

### Trigonometry

by

Frank Ayres

Robert Moyer

**English Edition:** Copyright © 2002 by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

**Arabic Edition:** Copyright © 2004 by International House for Cultural Investments S.A.E. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or distributed in any form or by any means, or stored in a data base or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

#### International House for Cultural Investments S.A.E.

8, Ibrahim El-Orabi St., El-Nozha El-Gedida

Heliopolis West, Cairo, Egypt

E-mail: ihci@link.net

الطبعة العربية الأولى حقوق الطبع والنشر © 2004، جميع الحقوق محفوظة للدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م. لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى وجه أو بأى طريقة سواء كانت إلكترونية أو ميكانيكية أو بالتصوير أو خلاف ذلك إلا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقدمات

#### الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

8 إبراهيم العرابى - النزهة الجديدة - مصر الجديدة - القاهرة - ج.م.ع.

ص.ب: 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة - تليفون: 6222105/6221944 فاكس: 6221944 (00202)

بريد إلكترونى: ihci@link.net

رقم الإيداع: 2003/9481

I.S.B.N: 977-282-145-7

## كتب أخرى فى سلسلة ملخصات شوم إيزى

- ملخص شوم إيزى : الفيزياء العامة
- ملخص شوم إيزى : الفيزياء التطبيقية
- ملخص شوم إيزى : الكهرومغناطيسيات
- ملخص شوم إيزى : الكيمياء العامة
- ملخص شوم إيزى : الكيمياء العضوية
- ملخص شوم إيزى : البيولوجيا
- ملخص شوم إيزى : البيولوجيا الجزيئية وبيولوجيا الخلية
- ملخص شوم إيزى : الوراثة
- ملخص شوم إيزى : الجبر العام
- ملخص شوم إيزى : الجبر الأساسى
- ملخص شوم إيزى : الهندسة
- ملخص شوم إيزى : الاحتمالات والإحصاء
- ملخص شوم إيزى : الإحصاء
- ملخص شوم إيزى : مبادئ التفاضل والتكامل
- ملخص شوم إيزى : حساب التفاضل والتكامل
- ملخص شوم إيزى : مرجع رياضى لأهم القوانين والجداول
- ملخص شوم إيزى : الرياضيات المنفصلة
- ملخص شوم إيزى : البرمجة بلغة C++
- ملخص شوم إيزى : البرمجة بلغة JAVA
- ملخص شوم إيزى : أساسيات الكهرباء
- ملخص شوم إيزى : مبادئ الاقتصاد
- ملخص شوم إيزى : الإحصاء التجارى
- ملخص شوم إيزى : مبادئ المحاسبة
- ملخص شوم إيزى : مقدمة فى علم النفس

## فرانك أيرز

سبق له العمل كأستاذ ورئيس لقسم الرياضيات بكلية ديكنسون بمدينة كارل أيسل بولاية بنسلفانيا. وهو مؤلف ثمانية كتب بعنوان ملخصات شوم منها علم حساب التفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية والرياضيات العامة.

## روبرت موير

مدرس الرياضيات بجامعة ولاية فورت فالى بمدينة فورت فالى بولاية جورجيا وسبق له العمل رئيساً لقسم الرياضيات والفيزياء. كما سبق له العمل مستشاراً للرياضيات للجمعية التعاونية للمدارس العامة لخمس مقاطعات. كما درس الرياضيات بالمدارس الثانوية فى الينوى. حصل على درجة الدكتوراه فى تعليم الرياضيات من جامعة الينوى ودرجتى البكالوريوس والماجستير من جامعة الينوى الجنوبية.

## چورچ ج. هادمينوس

دَرسَ فى جامعة دالاس وأجرى أبحاثاً لدى المركز الطبى لجامعة ماساشويستس وجامعة كاليفورنيا فى لوس أنجلوس. وهو حاصل على درجة البكالوريوس من جامعة ولاية أنجلو ودرجتى الماجستير والدكتوراه من جامعة تكساس بدالاس. وهو مؤلف عدة كتب ضمن سلسلة شوم وملخصات شوم إيزى.

# المحتويات

|     |       |                         |                                             |
|-----|-------|-------------------------|---------------------------------------------|
| 7   | ..... | الفصل الأول             | : الزوايا وتطبيقاتها                        |
| 17  | ..... | الفصل الثانى            | : الدوال المثلثية للزوايا العامة            |
| 35  | ..... | الفصل الثالث            | : الدوال المثلثية للزاوية الحادة            |
| 51  | ..... | الفصل الرابع            | : تطبيقات عملية                             |
| 67  | ..... | الفصل الخامس            | : الاختزال لدوال الزوايا الحادة الموجبة ... |
| 75  | ..... | الفصل السادس            | : متغيرات ومنحنيات الدوال المثلثية          |
| 89  | ..... | الفصل السابع            | : العلاقات الأساسية والمتطابقات             |
| 93  | ..... | الفصل الثامن            | : الدوال المثلثية لزاويتين                  |
| 101 | ..... | الفصل التاسع            | : قوانين الجمع والطرح والضرب للزوايا ..     |
| 105 | ..... | الفصل العاشر            | : المثلثات المائلة                          |
| 117 | ..... | الفصل الحادى عشر        | : مساحة المثلث                              |
| 123 | ..... | الفصل الثانى عشر        | : الدوال المثلثية العكسية                   |
| 131 | ..... | الفصل الثالث عشر        | : المعادلات المثلثية                        |
| 139 | ..... | قائمة المصطلحات العلمية | (انجليزى/عربى)                              |





# الفصل الأول

## الزوايا وتطبيقاتها

### Angles and Applications

فى هذا الفصل:

- ✓ مقدمة
- ✓ الزاوية المستوية
- ✓ قياس الزوايا
- ✓ طول القوس
- ✓ أطوال الأقواس لدائرة الوحدة
- ✓ مساحة القطاع
- ✓ السرعة الزاوية

#### Introduction



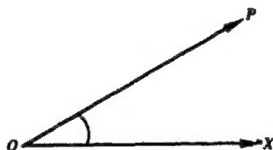
#### مقدمة

علم حساب المثلثات كما هو واضح من الاسم، يشمل قياس أضلاع وزوايا المثلث. وحساب المثلثات المستوى موضوع هذا الكتاب، يختص بدراسة المثلثات فى مستوى واحد. وأساس علم حساب المثلثات هو مجموعة من النسب تسمى

الدوال المثلثية Trigonometric Functions، وسوف نقوم بتفسيرها في الفصل التالي. ومن التطبيقات المبكرة استخدام الدوال المثلثية في علوم المساحة والملاحة والهندسة. وتلعب هذه الدوال أيضاً دوراً هاماً في دراسة كل أنواع ظواهر التردد كالصوت والضوء والكهرباء. وبالتالي سنقدم جزءاً معقولاً من الكتاب يتعلق بدراسة الخواص والعلاقات بين الدوال المثلثية.

## Plane Angle الزاوية المستوية

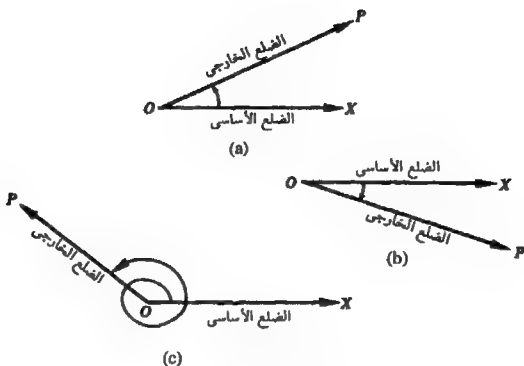
الزاوية المستوية  $XOP$  كما هو موضح بشكل 1-1 مكونة من شعاعين  $OX$  و  $OP$ . وتسمى نقطة  $O$  برأس الزاوية والشعاعان هما ضلعَا الزاوية.



شكل 1-1

وتسمى الزاوية زاوية موجبة إذا كان اتجاه الدوران (المحدد بالقوس) عكس اتجاه دوران عقارب الساعة وسالبة إذا كان اتجاه الدوران مع عقارب الساعة.

الزاوية موجبة في شكل 1-2(a) و 1-2(c) وسالبة في شكل 1-2(b).



شكل 1-2

## Measures of Angles

## قياس الزوايا

تعرف الدرجة ( $^{\circ}$ ) كوحدة قياس لزاوية مركزية لقوس من دائرة يساوي  $1/360$  من محيط الدائرة.

الدقيقة ( $'$ )  $= 1/60$  من الدرجة، الثانية ( $''$ )  $= 1/60$  من الدقيقة أو  $1/3600$  من الدرجة. عند تحويل الكسر العشري من الدرجة إلى دقائق أو ثواني فإن القاعدة العامة هي تحويل الجزء العشري إلى أقرب دقيقة وياقي الزوايا الأخرى تقرب إلى أقرب جزء من المئة ثم إلى أقرب ثانية. وعند تحويل دقائق وثنائي الزوايا إلى كسر عشري تحول الدقائق من الزوايا إلى جزء عشري والثنائي إلى جزء مئوي.

### Example 1.1

### مثال 1.1:

$$(a) \quad 62.4^{\circ} = 62^{\circ} + 0.4 (60') = 62^{\circ}24'$$

$$(b) 23.9^\circ = 23^\circ + 0.9 (60') = 23^\circ 54'$$

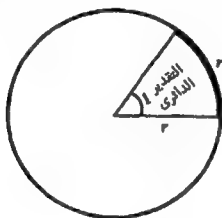
$$(c) 29.23^\circ = 29^\circ + 0.23 (60') = 29^\circ 13.8' = 29^\circ 13' + 0.8 (60'') = 29^\circ 13' 48''$$

$$(d) 37.47^\circ = 37^\circ + 0.47 (60') = 37^\circ 28.2' = 37^\circ 28' + 0.2 (60'') = 37^\circ 28' 12''$$

$$(e) 78^\circ 17' = 78^\circ + 17'/60 = 78.3^\circ \text{ (مقربة إلى جزء عشري)}$$

$$(f) 58^\circ 22' 16'' = 58^\circ + 22'/60 + 16''/3600 = 58.37^\circ \text{ (مقربة إلى جزء مئوي)}$$

التقدير الدائري (rad) يعرف بأنه هو الزاوية المركزية المرسومة لقوس من دائرة يساوي نصف قطر الدائرة. انظر شكل 1-3.



شكل 1-3

محيط الدائرة  $2\pi r$  حيث أن  $r$  هو نصف قطر الدائرة وزاوية مركزية مقدارها  $360^\circ$ . لذلك

$$\therefore 1 \text{ (دائري)} = 57^\circ 17' 45'' = 57.286^\circ = 180^\circ/\pi$$

$$\text{و } 1 \text{ (درجة)} = \pi/180 = 0.017453 \text{ دائري rad.}$$

$$\text{حيث أن : } \pi = 3.14159$$

مثال 1.2 : (a)  $7/12 \pi \text{ rad} = (7\pi/12)(180^\circ/\pi) = 105^\circ$  Example 1.2

التحويل من دائري إلى درجات ستينية.

(b)  $50^\circ = 50(\pi/180) \text{ rad} = (5\pi/18) \text{ rad}$

التحويل من درجات ستينية إلى دائري.

## Arc Length

## طول القوس

في دائرة نصف قطرها  $r$ ، وزاوية مركزية مقدارها  $\theta$  بالتقدير الدائري radians، شكل 1-4 فإن طول القوس  $s$  المحدد بالزاوية المركزية  $\theta$ :

$$s = r\theta$$

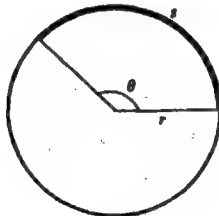
أى أن:

طول القوس = نصف قطر الدائرة  $\times$  الزاوية المركزية بالتقدير الدائري

ملاحظة!



يمكن قياس  $s$  و  $r$  بأي وحدات قياس طول مناسبة ولكن يجب أن يكون وحدة القياس موحدة للطرفين.



شكل 1-4

مثال 1.3 (a) طول القوس لدائرة نصف قطرها 30 بوصة لزواية مركزية مقدارها  $1/3$  دائري هو:

**Example 1.3** (a) On a circle of radius 30 in, the length of the arc intercepted by a central angle of  $1/3$  rad is:

$$s = r\theta = 30(1/3) = 10 \text{ in}$$

(b) على نفس الدائرة. طول القوس لزواية مركزية مقدارها  $50^\circ$  هو:

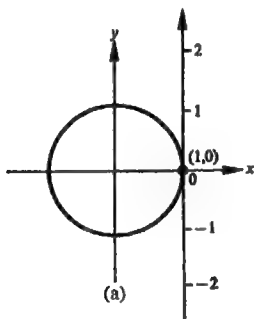
(b) On the same circle, a central angle of  $50^\circ$  intercepts an arc of length:

$$s = r\theta = 30(5\pi/18) = 25\pi/3 \text{ in}$$

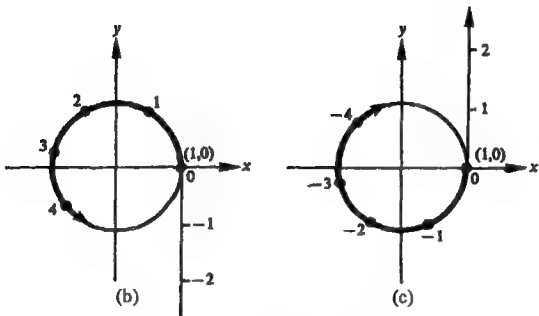
## أطوال الأقواس لدائرة الوحدة

### Lengths of Arcs on a Unit Circle

العلاقة بين النقط التي تقع على خط الأعداد الحقيقية والنقط التي تقع على دائرة الوحدة  $x^2 + y^2 = 1$  التي مركزها نقطة الأصل موضحة بالشكل 1-5.



شكل 1-5



(تابع) شكل 1-5

الصفر 0 معلوم على خط الأعداد بالنقطة (1,0) كما هو موضح بشكل 1-5(a). الأعداد الحقيقية الموجبة موضحة على الدائرة عكس دوران عقارب الساعة شكل 1-5(b). والأعداد الحقيقية السالبة موضحة على الدائرة فى اتجاه دوران عقارب الساعة شكل 1-5(c). وكل نقطة على دائرة الوحدة معلومة بعدة قيم لأعداد حقيقية سواء موجبة أو سالبة.

نصف قطر دائرة الوحدة طوله الواحد الصحيح، ولذلك فإن محيط الدائرة المعلوم بالقانون  $2\pi$ . (هو  $2\pi$ ) ونصف محيط الدائرة  $\pi$  وربع المحيط  $\pi/2$ . وكل عدد موجب يقابل طول القوس من الدائرة  $s$ ، ومن القانون  $\theta = \theta$ .  $s = r\theta = 1$ . وكل عدد حقيقى يقابل الزاوية  $\theta$  بالتقدير الدائرى. ومن جهة أخرى كل عدد حقيقى سالب يقابل (سالب طول القوس).

أى أنه يقابل الزاوية السالبة للقوس بالتقدير الدائرى.

## Area of a Sector

## مساحة القطاع

مساحة القطاع  $K$  لدائرة نصف قطرها  $r$  وزاوية القوس المركزية  $\theta$  بالتقدير الدائري هي

$$K = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

أى أن: مساحة القطاع للدائرة =

$\frac{1}{2} \times$  نصف قطر الدائرة  $\times$  نصف قطر الدائرة  $\times$  الزاوية المركزية بالتقدير الدائري.

ملاحظة!



وحدة قياس مساحة القطاع هي مربع وحدة المساحة حسب وحدة قياس الطول.

مثال 1.4 أوجد مساحة القطاع لدائرة نصف قطرها 18 cm، ومحدودة بزاوية مركزية مقدارها  $50^\circ$ .

**Example 1.4** For a circle of radius 18 cm, the area of a sector intercepted by a central angle of  $50^\circ$  is

$$K = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} (18)^2 \frac{5\pi}{18} = 45 \pi \text{ cm}^2 \text{ or } 141 \text{ cm}^2 \text{ (تقريباً)}$$



تذكروا!

$$50^\circ = \frac{5\pi}{18} \text{ بالتقدير الدائري}$$



## Angular Velocity

## السرعة الزاوية

العلاقة بين السرعة الخطية  $v$  والسرعة الزاوية  $\omega$  (الحرف اللاتيني أوميغا) لجسم نصف قطره  $r$  هي:

$$v = r\omega$$

حيث أن وحدة قياس  $\omega$  بالتقدير الدائري بالنسبة لوحدة الزمن ووحدة قياس  $v$  هي وحدة مسافة بالنسبة للزمن.

$v, \omega$  لهما نفس وحدة القياس بالنسبة للزمن  $r$  و  $v$  لهما نفس وحدة القياس الطولية (الخطية).

مثال 1.5 دراجة تهبط منحدر بسرعة 15 ميل/ساعة. أوجد السرعة الزاوية للدراجة (لفة/دقيقة) إذا كان قطر الطارة 20 بوصة.

**Example 1.5** A bicycle with 20-in wheels is traveling down a road at 15 mi/h. Find the angular velocity of the wheel in revolutions per minute.

نصف قطر طارة الدراجة هو 10 بوصات والسرعة الزاوية المطلوبة بعدد اللفات/دقيقة لذلك يجب تحويل السرعة الخطية 15 ميل/ساعة إلى وحدة بوصة/دقيقة in/min.

$$\begin{aligned} v &= 15 \text{ mi/h} \\ &= (15/1)(\text{mi/h}) \cdot (5280/1)(\text{ft/mi}) \cdot (12/1)(\text{in/ft}) \cdot (1/60)(\text{h/min}) \\ &= 15,840 \text{ in/min} \end{aligned}$$

$$\omega = v/r = (15,840/10)(\text{rad/min}) = 1584 \text{ rad/min}$$

لتحويل  $\omega$  إلى عدد لفات/دقيقة نضرب في  $1/2\pi$  لفة لكل زاوية نصف قطرية ( $r/\text{rad}$ ).

$$\omega = 1584 \text{ rad/min} = (1584/1)(\text{rad/min}) \cdot (1/2\pi)(r/\text{rad}) \\ = (792/\pi)(r/\text{min}) \text{ or } 252 \text{ r/min}$$

**مسألة محلولة 1.1** باعتبار أن الأرض عبارة عن كرة نصف قطرها 3960 ميل. أوجد البعد الزاوي لنقطة تصنع زاوية مقدارها  $36^\circ$  شمال خط الاستواء.

**Solved Problem 1.1** Assuming the Earth to be a sphere of radius 3960 mi, find the distance of a point  $36^\circ\text{N}$  latitude from the equator.

**الحل:**

$$36^\circ = \pi/5 \text{ rad}, s = r\theta = 3960(\pi/5) = 2488 \text{ mi.}$$

**مسألة محلولة 1.2** مدينتان تقعان على خط طول واحد والمسافة بينهما 270 ميل. أوجد الفرق في المدى.

**Solved Problem 1.2** Two cities 270 mi apart lie on the same meridian. Find their difference in latitude.

**الحل:**

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{270}{3960} = \frac{3}{44} \text{ rad} \quad \text{or} \quad 3^\circ 54.4'$$

# الفصل الثانى

## الدوال المثلثية للزوايا العامة

### Trigonometric Functions of a General Angle

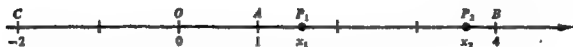
فى هذا الفصل:

- ✓ إحداثيات الخط المستقيم
- ✓ إحداثيات المستوى
- ✓ الوضع القياسى للزوايا
- ✓ الدوال المثلثية للزوايا العامة
- ✓ الإشارات الربعية للدوال
- ✓ الدوال المثلثية للزوايا الربعية
- ✓ الدوال المثلثية غير المعرفة
- ✓ إحداثيات النقط التى تقع على محيط دائرة الوحدة
- ✓ الدوال الدائرية

**Coordinates on a Line**      **إحداثيات الخط المستقيم**

الخط المتجه هو خط مستقيم له اتجاه موجب واتجاه آخر سالب. ويوضح الاتجاه الموجب برأس سهم وقياس الأعداد يتم على خط

الأعداد المتجه باختيار نقطة  $O$  (شكل 2-1) تسمى نقطة الأصل ووحدة القياس  $OA = 1$ .



شكل 2-1



على هذا المقياس مقدار نقطة  $B$  هو 4 وحدات على يمين نقطة  $O$  (في الاتجاه الموجب من النقطة  $O$ ) ومقدار نقطة  $C$  هو 2 وحدة على شمال نقطة  $O$  (في الاتجاه السالب من النقطة  $O$ ). المسافة المباشرة  $OB = +4$  والمسافة المباشرة  $OC = -2$  ومن

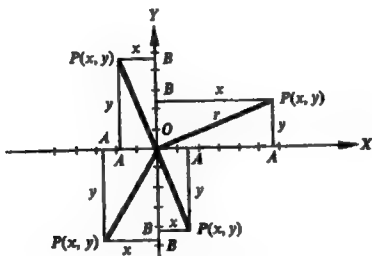
المهم جداً أن نذكر أنه في حالة تحديد اتجاه الخط المستقيم فإن  $OB \neq BO$  و  $OC \neq CO$ . المسافة المتجهة  $BO = -4$  وتقاس عكس الاتجاه الموجب المحدد للخط المستقيم والمسافة المباشرة  $CO = +2$  أى أن  $BC = BO + OC = -4 + (-2) = -6$  و  $CB = CO + OB = 2 + 4 = 6$ .

## Coordinates in a Plane

## إحداثيات المستوى

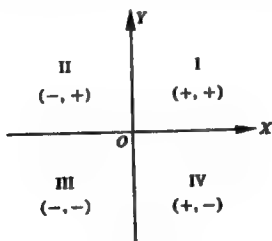
تتكون مجموعة الإحداثيات المتعامدة في المستوى من عددين من القياس (تسمى المحاور) (axes) إحداها أفقى والآخر رأسى ونقطة تقاطع المحورين هي نقطة الأصل (origin) لكل من الإحداثيين. ومن المعتاد أن نختار الاتجاه الموجب لكل من الإحداثيين كما هو موضح بالشكل 2-2 يكون موجباً في اتجاه اليمين للمحور الأفقى أو محور السينات وموجباً لأعلى على المحور الرأسى أو محور الصادات. ومن المناسب أن نختار وحدة قياس واحدة لكل من الإحداثيين.

ويمكن تحديد أى نقطة  $P$  فى المستوى بمعلومية الإحداثيات للنقطة  
 أى أن النقطة معلومة البعد عن المحاور الإحداثى السينى لنقطة  $P$  (شكل  
 2-2) معلوم بالبعد  $BP = OA$  والإحداثى الصادى للنقطة معلوم بالبعد  
 $AP = OB$  وسوف نشير إلى الإحداثى السينى للنقطة والإحداثى الصادى  
 بـ  $P(x, y)$ .



شكل 2-2

تقسم المحاور المستوى إلى أربعة أجزاء تسمى أرباع وترقم على  
 الترتيب فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة I, II, III, IV. أرقام  
 الأرباع وإشارات إحداثيات النقطة لكل قسم موضحة بشكل 2-3.



شكل 2-3

تسمى المسافة الغير متجهة  $r$  لآى نقطة  $P(x, y)$  من نقطة الأصل بالوتر (أحياناً تسمى المتجه نصف القطرى للنقطة  $P$ ) ويعطى بالعلاقة:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

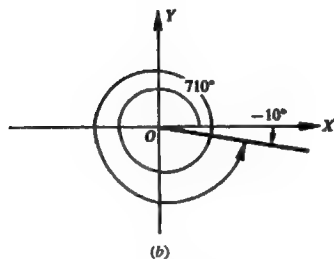
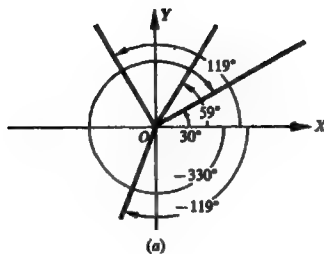
★ ملاحظة!

لكل نقطة فى المستوى ثلاثة أعداد:  $x, y, r$  نعينها.

## الوضع القياسى للزوايا Angles in Standard Position

بالنسبة لمجموعة الإحداثيات المتعامدة يقال أن الزاوية فى الوضع القياسى عندما يمر متجه الزاوية بنقطة الأصل ويتطابق الضلع الأساسى للزاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

وتسمى الزاوية بزاوية الربع الأول First-Quadrant Angle أو الزاوية التى تقع فى الربع الأول عندما يكون الضلع الخارجى للزاوية يقع فى هذا الربع وعلى سبيل المثال الزوايا  $30^\circ, 59^\circ, 330^\circ$  هى زوايا الربع الأول شكل 2-4(a)، الزاوية  $119^\circ$  تقع فى الربع الثانى، الزاوية  $-119^\circ$  تقع فى الربع الثالث والزوايا  $-10^\circ, 710^\circ$  هى زوايا الربع الرابع شكل 2-4(b).



شكل 2-4

عندما تكون زاويتان في الوضع القياسى والضلع الخارجى لكل منهما  
ينطبق على الضلع الآخر يقال أن الزاويتين متطابقتان Coterminal Angles،  
وعلى سبيل المثال الزاوية  $30^\circ$ ،  $-330^\circ$  والزاوية  $-10^\circ$ ،  $710^\circ$  هي أزواج  
من الزوايا المتطابقة وهناك عدد غير محدود من الزوايا المتطابقة.

ومجموعة الزوايا المطابقة لأى زاوية يمكن إيجادها بإضافة  
مضاعفات الزاوية  $360^\circ$  إلى الزاوية المعروفة.

الزوايا  $0^\circ$ ،  $90^\circ$ ،  $180^\circ$ ،  $270^\circ$  وكل الزوايا المطابقة لهم تسمى الزوايا  
الرابعة Quadrantal Angles.

## الدوال المثلثية للزوايا العامة

### Trigonometric Functions of a General Angle

نفرض أن زاوية  $\theta$  (زاوية ليست ربعية) فى الوضع القياسى ونقطة  $P(x, y) \neq (0, 0)$  تقع على الضلع الخارجى للزاوية، فإن الدوال المثلثية الستة للزاوية تعرف بالإحداثى السينى والصادى وبعد النقطة  $P$  عن نقطة الأصل كالتالى:

جيب الزاوية

$$\text{sine } \theta = \sin \theta = \frac{\text{ordinate}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{الإحداثى الصادى}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{r}$$

جيب تمام الزاوية

$$\text{cosine } \theta = \cos \theta = \frac{\text{abscissa}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{الإحداثى السينى}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{r}$$

ظل الزاوية

$$\text{tangent } \theta = \tan \theta = \frac{\text{ordinate}}{\text{abscissa}} = \frac{\text{الإحداثى الصادى}}{\text{الإحداثى السينى}} = \frac{y}{x}$$

ظل تمام الزاوية

$$\text{cotangent } \theta = \cot \theta = \frac{\text{abscissa}}{\text{ordinate}} = \frac{\text{الإحداثى السينى}}{\text{الإحداثى الصادى}} = \frac{x}{y}$$

قاطع الزاوية

$$\text{secant } \theta = \sec \theta = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{abscissa}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{الإحداثى السينى}} = \frac{r}{x}$$

قاطع تمام الزاوية

$$\text{cosecant } \theta = \csc \theta = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{ordinate}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{الإحداثى الصادى}} = \frac{r}{y}$$

وكنتيجة طبيعية لهذه النسب المثلثية توجد العلاقات المثلثية التالية:



$$\sin \theta = 1/\csc \theta$$

$$\tan \theta = 1/\cot \theta$$

$$\sec \theta = 1/\cos \theta$$

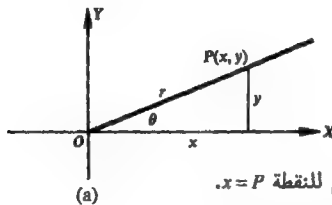
$$\cos \theta = 1/\sec \theta$$

$$\cot \theta = 1/\tan \theta$$

$$\csc \theta = 1/\sin \theta$$

ولكل زوج من مقلوب هذه العلاقات تستخدم دالة واحدة من مقلوب الدوال المثلثية وتكون شائعة الاستعمال أكثر من الدالة الأخرى. ومن الدوال المثلثية شائعة الاستعمال جيب وجيب تمام وظل الزاوية .

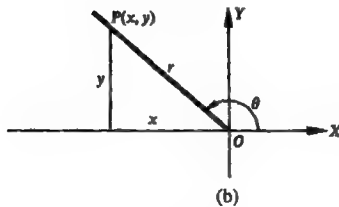
ومن الواضح من الشكل 2-5 أن الدوال المثلثية لأي زاوية  $\theta$  تتغير مع تغيير الزاوية.



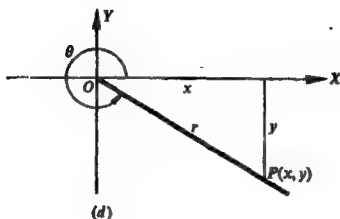
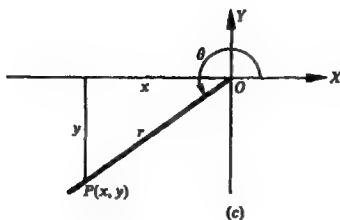
الإحداثى السيني للنقطة  $P$  .

الإحداثى الصادي للنقطة  $P$  .

بعد النقطة  $P$  عن نقطة الأصل  $r = 0$  .



شكل 2-5

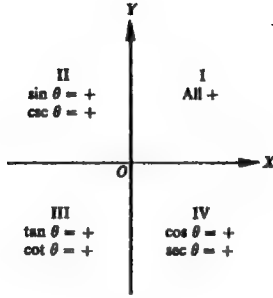


تابع شكل 2-5

## الإشارات الربعية للدوال

### Quadrant Signs of the Functions

متجه الزاوية  $r$  دائماً يكون موجباً وإشارة الدوال المثلثية فى أرباع المحاور تعتمد على إشارة  $x$  و  $y$ . وتحدد إشارة الدوال المثلثية حسب الوضع القياسى للزاوية أو استخدام بعض الأشكال التى توضح الإشارات الموجبة للدوال المثلثية فى كل ربع. كما هو واضح فى شكل 2-6.



شكل 2-6

الدوال المثلثية لزاوية معلومة تكون وحيدة القيمة إلا أنه عند إيجاد الزاوية لدالة مثلثية معلومة يكون الناتج عدة زوايا تعطى نفس القيمة للدالة المثلثية. على سبيل المثال إذا كان:  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  فإن قيمة  $\theta$  التي تحقق العلاقة هي  $30^\circ$ ،  $150^\circ$ ،  $390^\circ$ ،  $510^\circ$ ، ... وعلى وجه العموم فإن هناك احتمالين لوضعي الضلع الخارجى للزاوية وكمثال لذلك الضلع الخارجى للزاوية  $30^\circ$  والزاوية  $150^\circ$ . يتم استثناء هذه القاعدة عند تحديد الربع التي تقع فيه الزاوية.

## الدوال المثلثية للزوايا الربعية

### Trigonometric Functions of Quadrantal Angles



بالنسبة للزوايا الربعية إذا تطابق الضلع الخارجى للزاوية مع أحد المحاور فإن بعد النقطة  $P$  عن نقطة الأصل على الضلع الأساسى للزاوية يكون إما  $x=0$  و  $y \neq 0$  أو  $x \neq 0$  و  $y=0$  وعلى أى حالة فإن دالتين من الدوال الستة لا يمكن تعريفهما. على سبيل المثال يتطابق الضلع

الخارجى للزاوية  $0^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ويكون الإحداثى الصادى للنقطة  $P$  مساوياً الصفر. وعلى ذلك لا يمكن تعريف الدالتين ظل تمام الزاوية  $\cotangent$  وقاطع تمام الزاوية  $\operatorname{cosecant}$  لأن مقام النسبة المثلثية فى هذه الحالة يساوى الصفر. وفى هذا الكتاب سوف يتم استخدام التعبير أن الدالة غير معرفة  $\operatorname{undefined}$  بدلاً من استخدام القيمة العددية فى مثل هذه الحالات. ولكن بعض المؤلفين يوضح ذلك بكتابة  $\cot 0^\circ = \infty$  والبعض الآخر يكتب  $\cot 0^\circ = \pm\infty$ .

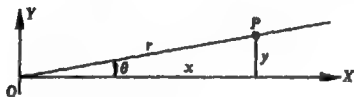
| الزاوية $\theta$ | جيب الزاوية   | جيب تمام الزاوية | ظل الزاوية    | ظل تمام الزاوية | قاطع الزاوية  | قاطع تمام الزاوية |
|------------------|---------------|------------------|---------------|-----------------|---------------|-------------------|
| angle $\theta$   | $\sin \theta$ | $\cos \theta$    | $\tan \theta$ | $\cot \theta$   | $\sec \theta$ | $\csc \theta$     |
| $0^\circ$        | 0             | 1                | 0             | غير معرفة       | 1             | غير معرفة         |
| $90^\circ$       | 1             | 0                | غير معرفة     | 0               | غير معرفة     | 1                 |
| $180^\circ$      | 0             | -1               | 0             | غير معرفة       | -1            | غير معرفة         |
| $270^\circ$      | -1            | 0                | غير معرفة     | 0               | غير معرفة     | -1                |

## الدوال المثلثية غير المعرفة

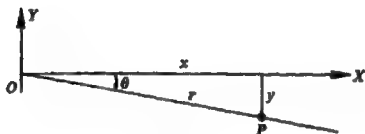
### Undefined Trigonometric Functions

سبق دراسة أن النسب المثلثية  $\cot 0^\circ$ ،  $\sec 0^\circ$  غير معرفة على أساس أن القسمة على العدد صفر غير ممكنة، ولكن قيمة الدوال المثلثية للزوايا التى تقترب من الصفر جدية بالاهتمام. وشكل (a) 2-7 يوضح أن زاوية  $\theta$  هى زاوية صغيرة فى الوضع القياسى وعلى الضلع الخارجى للزاوية توجد نقطة  $P(x, y)$  على مسافة مقدارها  $r$  من نقطة  $O$ . قيمة  $x$  موجبة وتقل قليلاً عن البعد  $r$  وعلى هذا الأساس فإن النسبة المثلثية  $\cot \theta = x/y$ ،  $\csc \theta = r/y$  تصبح كبيرة القيمة وموجبة نفرض أن زاوية  $\theta$  تقل فى اتجاه الزاوية  $0$  ولكن ما زال بعد نقطة  $P$  من نقطة  $O$  هو  $r$ .

والآن البعد  $x$  يزيد ولكنه يظل أقل من البعد  $r$  بينما يقل البعد  $y$  ولكنه أكبر من الصفر، وهكذا فإن النسب المثلثية  $\theta$  و  $\csc \theta$  تصبح أكبر وأكبر. ولإثبات ذلك نفرض أن  $r = 1$  ثم احسب  $\csc \theta$  عندما  $y = 0.1, 0.01, 0.001, \dots$  وتوضح هذه الحالة عند اقتراب  $\theta$  من  $0^+$  تقترب  $\cot \theta$  من  $+\infty$  وهذا يفسر أن  $\cot 0^+ = +\infty$ .



(a)



(b)

شكل 2-7



الفرض التالي كما هو موضح بشكل 2-7(b) زاوية  $\theta$  هي زاوية سالبة وتقترب من  $0^+$ . وعلى الضلع الخارجى توجد نقطة  $P$  على مسافة مقدارها  $r$  من نقطة  $O$ . قيمة  $x$  موجبة وتقل قليلاً عن البعد  $r$  بينما البعد  $y$  سالباً وله قيمة مطلقة صغيرة. وعلى هذا الأساس فإن النسب المثلثية

$\cot \theta$ ،  $\csc \theta$  تصبح كبيرة القيمة المطلقة وسالبة الإشارة. نفرض أن زاوية  $\theta$  تقل فى اتجاه الزاوية  $0$ . ولكن مازال بعد نقطة  $P$  من نقطة  $O$

هو  $r$  والآن البعد  $x$  يزيد ولكنه يظل أقل من البعد  $r$  بينما يقل البعد  $y$  بالقيمة السالبة المطلقة وهكذا فإن النسب المثلثية  $\cot \theta$ ,  $\csc \theta$  تصبح أكبر وأكبر بالقيمة السالبة المطلقة. وتوضح هذه الحالة عند اقتراب  $\theta$  من  $0^\circ$  تقترب  $\cot \theta$  من  $-\infty$  وهذا يفسر أن  $\cot 0^\circ = -\infty$ .

استخدام علامة  $=$  فى كل من الحالات  $\cot \theta = -\infty$  و  $\cot 0^\circ = \infty$  ليس له المعنى القياسى للتساوى ويجب استخدامه بحرص وخاصة أن النسب المثلثية  $\cot 0^\circ$  غير معرفة وعلامة  $\infty$  ليست عدد، ولكنها رمز مختصر يوضح حالة خاصة لدالة من الدوال المثلثية.

ويمكن توضيح الدوال المثلثية الأخرى غير المعرفة بطريقة بسيطة. والخريطة التالية تلخص الدوال المثلثية غير المعرفة للزوايا من  $0^\circ$  إلى  $360^\circ$ .

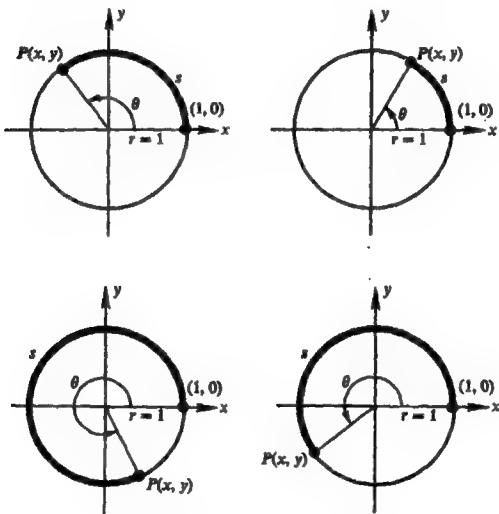
| الزاوية $\theta$                | Angle $\theta$ | قيمة الدالة                                                             | Function Values |
|---------------------------------|----------------|-------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| $\theta \rightarrow 0^{0+}$     |                | $\cot \theta \rightarrow +\infty$ and $\csc \theta \rightarrow +\infty$ |                 |
| $\theta \rightarrow 0^{0-}$     |                | $\cot \theta \rightarrow -\infty$ and $\csc \theta \rightarrow -\infty$ |                 |
| $\theta \rightarrow 90^{90-}$   |                | $\tan \theta \rightarrow +\infty$ and $\sec \theta \rightarrow +\infty$ |                 |
| $\theta \rightarrow 90^{90+}$   |                | $\tan \theta \rightarrow -\infty$ and $\sec \theta \rightarrow -\infty$ |                 |
| $\theta \rightarrow 180^{180-}$ |                | $\cot \theta \rightarrow -\infty$ and $\csc \theta \rightarrow +\infty$ |                 |
| $\theta \rightarrow 180^{180+}$ |                | $\cot \theta \rightarrow +\infty$ and $\csc \theta \rightarrow -\infty$ |                 |
| $\theta \rightarrow 270^{270-}$ |                | $\tan \theta \rightarrow +\infty$ and $\sec \theta \rightarrow -\infty$ |                 |
| $\theta \rightarrow 270^{270+}$ |                | $\tan \theta \rightarrow -\infty$ and $\sec \theta \rightarrow +\infty$ |                 |

الإشارة الموجبة  $+$  تعنى أن القيمة العددية للنسب المثلثية أكبر من العدد الموضح للنسبة المثلثية، والزاوية  $180^{0+}$  تعنى أن الزاوية أكبر من  $180^\circ$ . الإشارة السالبة  $-$  تعنى أن القيمة العددية للنسبة أقل من العدد الموضح للنسبة المثلثية،  $90^{90-}$  تعنى أن الزاوية أقل من  $90^\circ$ .

## إحداثيات النقاط التي تقع على محيط دائرة الوحدة

### Coordinates of Points on a Unit Circle

نفرض أن  $s$  هو طول قوس على دائرة الوحدة  $x^2 + y^2 = 1$  وكل قوس طوله  $s$  معرف بزاوية نصف قطرية  $\theta$ . وعند استخدام النقطة  $(1,0)$  كنقطة بداية للقوس  $s$  ونقطة  $P(x, y)$  كنقطة نهاية للقوس كما هو موضح بشكل (2-8) يمكن تحديد إحداثيات النقطة  $P$  بدلالة العدد الحقيقي  $s$ .



شكل 2-8

النسب المثلثية لأى زاوية على دائرة الوحدة  $\cos \theta = x/r$  و  $\sin \theta = y/r$  حيث  $r=1$  وطول القوس  $s=r\theta=\theta$  والنسب المثلثية  $\cos \theta = \cos s = x/1 = x$  و  $\sin \theta = \sin s = y/1 = y$  ويمكن تحديد النقطة  $P$  التى تنتمى إلى طول القوس  $s$  بواسطة  $P(x, y) = P(\cos s, \sin s)$ . ويمكن كتابة العلاقة بين الدالة المحيطة  $W$  وهى تشمل الأعداد الحقيقية لطول القوس  $s$  ونقطة  $P$  على محيط دائرة الوحدة بالصورة التالية

$$W(s) = (\cos s, \sin s)$$

توجد علاقة بين أطوال بعض الأقواس والنقط التى تقع على محيط دائرة الوحدة ويمكن تحديدها بسهولة. عندما تكون  $s=0$  فإن النقطة هى  $(1,0)$  وعندما تكون  $s=\pi/2$  أى أن  $s$  ربع محيط دائرة الوحدة. تصبح النقطة هى  $(0,1)$  وعند  $s=\pi$  تصبح النقطة هى  $(-1,0)$  وطول المحيط  $s=3\pi/2$  ومرتبطة بالنقطة  $(0,-1)$  وهذه القيم موضحة بالجدول الآتى:

| $s$      | $P(x, y)$ | $\cos s$ | $\sin s$ |
|----------|-----------|----------|----------|
| 0        | (1, 0)    | 1        | 0        |
| $\pi/2$  | (0, 1)    | 0        | 1        |
| $\pi$    | (-1, 0)   | -1       | 0        |
| $3\pi/2$ | (0, -1)   | 0        | -1       |

## Circular Functions

## الدوال الدائرية



لكل طول قوس  $s$  زوج من الدوال المثلثية  $\cos s, \sin s$  على دائرة الوحدة. وكل من  $\cos s, \sin s$  أعداد حقيقية وتعرف بالدالة  $(s, \cos s)$  وتسمى الدالة الدائرية لجيب تمام الزاوية. ومن ناحية أخرى فإن كل من  $\sin s, \cos s$  أعداد حقيقية وتعرف بالدالة  $(s, \sin s)$  وتسمى الدالة الدائرية لجيب الزاوية. وهذه الدوال تسمى الدوال الدائرية حيث أن كل من  $\cos s, \sin s$  هى إحداثيات لدائرة الوحدة.



وتتشابه الدوال الدائرية  $\sin s$ ,  $\cos s$  مع الدوال المثلثية  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  حيث أنه يمكن تحويل أى زاوية من التقدير الستينى إلى التقدير الدائرى وهذا القياس الدائرى للزاوية النصف قطرية مرتبط بطول القوس  $s$  على دائرة الوحدة. ومن المميزات الهامة للدوال الدائرية  $(s, \sin s)$  و  $(s, \cos s)$  أن لها زوجاً من القيم الحقيقية وكل الخواص والخطوات للدوال ذات القيم الحقيقية تنطبق على الدوال الدائرية.

ويمكن تعريف كل من الدوال الدائرية الأخرى بدلالة  $\sin s$  و  $\cos s$ .

$$\tan s = \frac{\sin s}{\cos s} \quad \text{حيث أن } k \text{ عدد صحيح } \text{for } s \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\cot s = \frac{\cos s}{\sin s} \quad \text{حيث أن } k \text{ عدد صحيح } \text{for } s \neq k\pi$$

$$\sec s = \frac{1}{\cos s} \quad \text{حيث أن } k \text{ عدد صحيح } \text{for } s \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

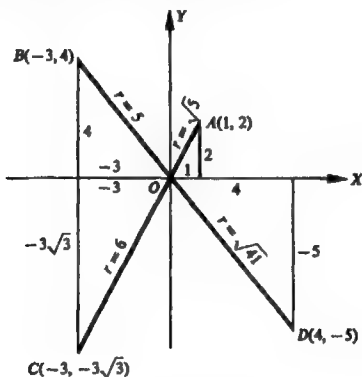
$$\csc s = \frac{1}{\sin s} \quad \text{حيث أن } k \text{ عدد صحيح } \text{for } s \neq k\pi$$

تكون الدوال الدائرية معرفة حيثما تكون الدوال المثلثية معرفة، وتكون قيمة مجال الدالة مناظرة للقيمة التى تكون عندها الدوال المثلثية غير معرفة.

وليس من الضرورى فى أى تطبيق أن نميز بين الدوال المثلثية للزوايا النصف قطرية والدوال الدائرية للأعداد الحقيقية.

مسألة محلولة 2-1 استخدم مجموعة الإحداثيات المتعامدة لتحديد النقاط الآتية ثم أوجد قيمة  $r$  لكل منها:  $A(1, 2)$ ,  $B(-3, 4)$ ,  $C(-3, -3\sqrt{3})$ ,  $D(4, -5)$ . كما هو موضح بشكل 2-9.

**Solved Problem 2.1** Using a rectangular coordinate system, locate the following points and find the value of  $r$  for each:  $A(1, 2)$ ;  $B(-3, 4)$ ;  $C(-3, -3\sqrt{3})$ ;  $D(4, -5)$  as shown in Figure 2-9.



شكل 2-9

الحل:

For A:  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$  البعد  $r$  بالنسبة لنقطة A

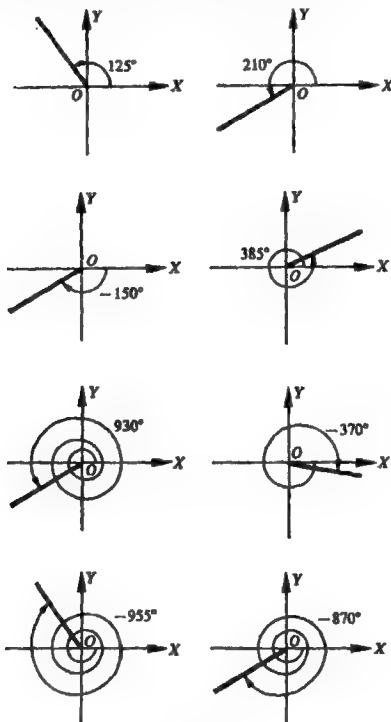
For B:  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$  البعد  $r$  بالنسبة لنقطة B

For C:  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$  البعد  $r$  بالنسبة لنقطة C

For D:  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$  البعد  $r$  بالنسبة لنقطة D

مسألة محلولة 2-2 وضع بالرسم الوضع القياسي لكل من الزوايا الآتية ومن الرسم أوجد كل من الزوايا المتطابقة  $125^\circ$ ،  $210^\circ$ ،  $-15^\circ$ ،  $385^\circ$ ،  $930^\circ$ ،  $-370^\circ$ ،  $-955^\circ$ ،  $-870^\circ$ . كما هو موضح بشكل 2-10.

**Solved Problem 2.2** Construct the following angles in standard position and determine those which are coterminal:  $125^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $-150^\circ$ ,  $385^\circ$ ,  $930^\circ$ ,  $-370^\circ$ ,  $-955^\circ$ , and  $-870^\circ$ , as shown in Figure 2-10.



شكل 2-10

الحل: شكل 2-10 يوضح الزوايا المطلوبة في الوضع القياسي. ومن الرسم نجد أن: الزاوية  $125^\circ$  مطابقة للزاوية  $-955^\circ$  حيث أن:

$125^\circ = 360^\circ - 3 - 955^\circ$  أو بصورة أخرى.  $360^\circ + 3 - 955^\circ = 125^\circ$   
والزوايا  $210^\circ$ ،  $150^\circ$ ،  $930^\circ$ ،  $870^\circ$  هي زوايا متطابقة حيث أن:  
 $360^\circ - 1 = 210^\circ - 150^\circ$ ؛  $360^\circ + 2 = 930^\circ - 210^\circ$  و  $360^\circ - 3 = 870^\circ - 210^\circ$   
ومن الشكل 2-10 نجد أن هناك زاوية فى الربع الأول  $385^\circ$  وزاوية فى  
الربع الرابع وهى  $370^\circ$  وهما زاويتان لا يتطابقان مع الزوايا الأخرى.

مسألة محلولة 2-3 فى أى ربع تقع زاوية  $\theta$  فى كل من الحالات الآتية:  
(a) عندما يكون جيب الزاوية موجباً؟ (b) عندما يكون جيب تمام  
الزاوية سالباً؟ (c) عندما يكون ظل الزاوية سالباً؟ (d) عندما يكون  
قاطع الزاوية موجباً؟

**Solved Problem 2-3** In what quadrants may  $\theta$  terminate, if: (a)  $\sin \theta$  is positive?; (b)  $\cos \theta$  is negative?; (c)  $\tan \theta$  is negative?; (d)  $\sec \theta$  is positive?

الحل:

(a) حيث أن النسبة المثلثية  $\sin \theta$  موجبة، فإن قيمة  $y$  موجبة وقيمة  $x$  تكون إما سالبة أو موجبة. وحسب قيمة  $y$  فإن الزاوية تقع فى  
الربع الأول أو الثانى.

(b) حيث أن النسبة المثلثية  $\cos \theta$  سالبة، فإن قيمة  $x$  سالبة وقيمة  $y$  تكون إما سالبة أو موجبة. وحسب قيمة  $x$  فإن الزاوية تقع فى الربع  
الثانى أو الثالث.

(c) حيث أن النسبة المثلثية  $\tan \theta$  سالبة، فإن قيمة  $x$  تكون سالبة وقيمة  $y$  موجبة أو العكس أى أن قيمة  $x$  تكون موجبة وقيمة  $y$  سالبة  
ولذلك فإن الزاوية تقع فى الربع الثانى أو الربع الرابع.

(d) حيث أن النسبة المثلثية  $\sec \theta$  موجبة فإن قيمة  $x$  تكون موجبة وحسب  
قيمة  $x$  الموجبة فإن الزاوية تقع فى الربع الأول أو الربع الرابع.

## الفصل الثالث

### الدوال المثلثية للزاوية الحادة

### Trigonometric Functions of an Acute Angle

فى هذا الفصل:

- ✓ الدوال المثلثية للزاوية الحادة
- ✓ الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين
- ✓ الدوال المثلثية للزوايا الخاصة  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $60^\circ$
- ✓ قيم الدوال المثلثية
- ✓ دقة النتائج باستخدام عمليات التقريب
- ✓ اختيار الدوال فى حلول المسائل
- ✓ زوايا الارتفاع والانخفاض

### الدوال المثلثية للزاوية الحادة

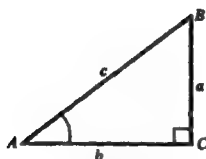
### Trigonometric Functions of an Acute Angle



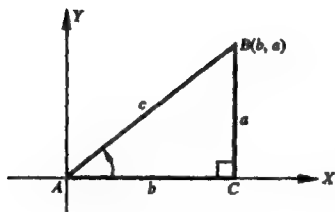
عند التعامل مع أى مثلث قائم الزاوية من المناسب تعريف المثلث برؤوسه الثلاثة  $A$ ،  $B$  و  $C$  كما هو واضح من الشكل 3-1 وزاوية  $C$  هى رأس القائمة.

وزوايا المثلث هي  $A, B$  و  $C$  والزاوية  $C = 90^\circ$  وأضلاع المثلث التي تقابل هذه الزوايا هي  $a, b$  و  $c$  على الترتيب.

بالنسبة لزاوية  $A$  فإن الضلع المقابل للزاوية هو الضلع  $a$  والضلع المجاور للزاوية هو الضلع  $b$ ، وبالنسبة لزاوية  $B$  فإن الضلع المقابل للزاوية هو الضلع  $b$  والضلع المجاور للزاوية هو الضلع  $a$  ويسمى الضلع  $c$  دائماً بالوتر.



شكل 3-1



شكل 3-2

وإذا تم تمثيل المثلث القائم على المحاور المتعامدة كما هو واضح من شكل 3-2 فإن زاوية  $A$  تكون في الوضع القياسي، ونقطة  $B$  تقع على الضلع الخارجى للزاوية  $A$  وإحداثياتها النقطة  $B$  هي  $(b, a)$  والمسافة  $c$  هي:  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

ولذلك يمكن تعريف النسب المثلثية لزاوية  $A$  بدلالة أضلاع المثلث القائم الزاوية كما يأتي:

$$\sin A = \frac{\text{opposite side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{adjacent side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{opposite side}}{\text{adjacent side}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot A = \frac{\text{adjacent side}}{\text{opposite side}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec A = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent side}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{c}{b}$$

$$\csc A = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite side}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{c}{a}$$

### الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين

### Trigonometric Functions of Complementary Angles

الزوايا الحادة للمثلث القائم الزاوية  $ABC$  هي زوايا متتامة حيث أن  $A + B = 90^\circ$  ومن شكل 1-3 نجد أن:

$$\sin B = b/c = \cos A$$

$$\cos B = a/c = \sin A$$

$$\tan B = b/a = \cot A$$

$$\cot B = a/b = \tan A$$

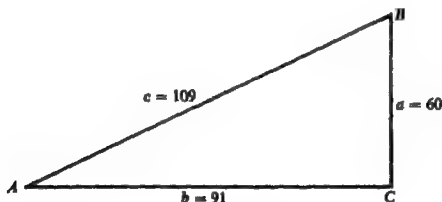
$$\sec B = c/a = \csc A$$

$$\csc B = c/b = \sec A$$

وتمثل هذه العلاقات أزواج من الدوال المثلثية - الجيب  $\sin$  وجيب التمام  $\cos$ ، الظل  $\tan$  وظل التمام  $\cot$ ، والقاطع  $\sec$  وقاطع التمام  $\csc$  وكل دالة من أزواج هذه الدوال تسمى الدالة المرافقة للدالة الأخرى. ولذلك فإن أى دالة لزاوية حادة تساوى الدالة المرافقة لتمام هذه الزاوية.

مثال 3.1 أوجد قيم الدوال المثلثية لزاويا المثلث القائم الزاوية  $ABC$  الموضح بشكل 3-3.

**Example 3.1** Find the values of the trigonometric functions of the angles of the right triangle  $ABC$  in Figure 3-3.



شكل 3-3

$$\sin A = \frac{\text{opposite side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c} = \frac{60}{109}$$

$$\cos A = \frac{\text{adjacent side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c} = \frac{91}{109}$$

$$\tan A = \frac{\text{opposite side}}{\text{adjacent side}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{a}{b} = \frac{60}{91}$$

$$\cot A = \frac{\text{adjacent side}}{\text{opposite side}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$



$$\sec A = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent side}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$

$$\csc A = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite side}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{c}{a} = \frac{109}{60}$$

$$\sin B = \frac{\text{opposite side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c} = \frac{91}{109}$$

$$\cos B = \frac{\text{adjacent side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c} = \frac{60}{109}$$

$$\tan B = \frac{\text{opposite side}}{\text{adjacent side}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$

$$\cot B = \frac{\text{adjacent side}}{\text{opposite side}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{a}{b} = \frac{60}{91}$$

$$\sec B = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent side}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{c}{a} = \frac{109}{60}$$

$$\csc B = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite side}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$

## الدوال المثلثية للزوايا الخاصة 30°, 45° و 60°

### Trigonometric Functions of 30°, 45° and 60°

يمكن حساب النسب المثلثية للزوايا الحادة الخاصة 30°, 45° و 60° بدقة تامة. وكل كسر مقامه عدد غير نسبي نذكر فقط مكافئ الكسر ومقامه عدد نسبي كما هو موضح بالجدول.

|     | $\sin \theta$         | $\cos \theta$         | $\tan \theta$        | $\cot \theta$        | $\sec \theta$        | $\csc \theta$        |
|-----|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 30° | $\frac{1}{2}$         | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$           | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 2                    |
| 45° | $\frac{1}{\sqrt{2}}$  | $\frac{1}{\sqrt{2}}$  | 1                    | 1                    | $\sqrt{2}$           | $\sqrt{2}$           |
| 60° | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$         | $\sqrt{3}$           | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 2                    | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ |

## قيم الدوال المثلثية Trigonometric Function Values

فى تطبيقات عديدة لمسائل الدوال المثلثية نحتاج إلى النسب المثلثية لزوايا عديدة لا تشمل الزوايا الخاصة المعروفة. ويمكن إيجاد النسب المثلثية لهذه الزوايا المطلوبة باستخدام جداول النسب المثلثية أو باستخدام الآلة الحاسبة. والجدول الآتى يوضح قيم الدوال المثلثية مقرباً إلى رقمين عشريين.

|     | $\sin \theta$ | $\cos \theta$ | $\tan \theta$ | $\cot \theta$ | $\sec \theta$ | $\csc \theta$ |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 15° | 0.26          | 0.97          | 0.27          | 3.73          | 1.04          | 3.86          |
| 20° | 0.34          | 0.94          | 0.36          | 2.75          | 1.06          | 2.92          |
| 30° | 0.50          | 0.87          | 0.58          | 1.73          | 1.15          | 2.00          |
| 40° | 0.64          | 0.77          | 0.84          | 1.19          | 1.31          | 1.56          |
| 45° | 0.71          | 0.71          | 1.00          | 1.00          | 1.41          | 1.41          |
| 50° | 0.77          | 0.64          | 1.19          | 0.84          | 1.56          | 1.31          |
| 60° | 0.87          | 0.50          | 1.73          | 0.58          | 2.00          | 1.15          |
| 70° | 0.94          | 0.34          | 2.75          | 0.36          | 2.92          | 1.06          |
| 75° | 0.97          | 0.26          | 3.73          | 0.27          | 3.86          | 1.04          |

عند استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيم الدوال المثلثية يجب التأكد من اتباع التعليمات الموجودة بدليل الآلة وعموماً يجب اتباع الخطوات الآتية (1) يجب التأكد من أن نظام الدرجة degree mode هو النظام المستخدم بالآلة، (2) أدخل عدد درجات الزاوية المطلوبة للحاسبة، (3) اضغط على مفتاح النسبة المثلثية المطلوبة فى الحاسبة، (4) اقرأ قيمة الدالة المطلوبة على شاشة الحاسب.

مثال 3.2 باستخدام الآلة الحاسبة أوجد النسبة المثلثية  $\tan 15^\circ$ .

**Example 3.2:** Find  $\tan 15^\circ$  using a calculator.

الحل: مع استخدام الآلة الحاسبة فى نظام الدرجة degree mode أدخل العدد 15 ثم اضغط مفتاح (tan). وسوف يظهر الرقم 0.267949 على الشاشة ولذلك فإن  $\tan 15^\circ = 0.267949$ . وعدد الخانات التى تظهر على الشاشة تعتمد على نوع الحاسب المستخدم ويجب استخدام حاسبات لا تقل عن ستة خانات.

وتستخدم الحاسبات لإيجاد قيمة الزاوية الحادة بمعلومية الدوال المثلثية للزاوية المطلوبة. وذلك باستخدام المفتاح العكسى (inv)key أو مفتاح الدالة الثانية key (2d). ويتم إدخال قيمة الدالة ونضغط المفتاح العكسى (inv)key الموجود بالحاسب، ثم نضغط مفتاح الدالة المثلثية للزاوية المطلوبة. ويستخدم نظام الدرجة للحاسبة لنحصل على الناتج بقياس الدرجات.

### دقة النتائج باستخدام عمليات التقريب

#### Accuracy of Results Using Approximations

عند استخدام الأعداد التقريبية يجب تقريب النتائج وفى هذا الفصل سوف نقرب الزوايا إلى أقرب درجة وأطوال الأضلاع إلى أقرب وحدة طول. وعندما تشمل حلول بعض المسائل القيم المتوسطة ننتظر حتى إيجاد الناتج النهائى ثم نقوم بعملية التقريب للنتائج. وكل قيمة متوسطة يجب أن تزيد على الأقل خانة واحدة عن الناتج النهائى المطلوب ولذلك فإن كل عملية تقريب لا تشمل مباشرة الدقة المطلوبة للنتائج.

## اختيار الدوال فى حلول المسائل

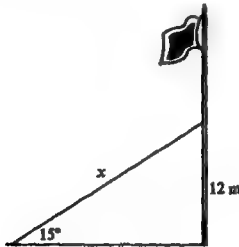
### Selecting the Function in Problem Solving



عند إيجاد ضلع من أضلاع المثلث القائم الزاوية بمعلومية ضلع وزاوية من المثلث، يمكن استخدام نوعين من الدوال المثلثية لحل المثلث وهى عبارة عن دالة ومقلوبها. وعند حل المسألة يجب اختيار الدالة المثلثية بحيث يكون الضلع المجهول هو البسط لكسر الدالة. ويتم هذا الاختيار على أساس أفضلية استخدام عمليات الضرب فى الحل عن عمليات القسمة. وعند استخدام الحاسبة فإن الدوال المستخدمة هى جيب الزاوية، جيب تمام الزاوية وظل الزاوية حيث أن هذه الدوال المثلثية ممثلة بمفاتيح فى الحاسبات.

مثال 3.3 علم مثبت على بعد 12 متر من قاعدة العلم باستخدام سلك تثبيت يصنع زاوية مقدارها  $15^\circ$  مع المستوى الأفقى للأرض. كما هو موضح بشكل 3-4. أوجد طول السلك؟

**Example 3.3** A support wire is anchored 12 m up from the base of a flagpole and the wire makes a  $15^\circ$  angle with the ground, as shown in Figure 3-4. How long is the wire?



شكل 3-4

الحل: من الشكل 3-4 نجد أن كل من الدوال المثلثية المطلوبة  $\sin 15^\circ$  و  $\csc 15^\circ$  تشمل طول الضلع المعلوم 12 متر وطول الضلع المطلوب إيجاد  $x$ . ويمكن استخدام أى من الدالتين لحل المسألة. واستخدام جداول حساب المثلثات أسهل من استخدام الحاسبات فى حل هذا النوع من المسائل باستخدام  $\csc 15^\circ$ ، ولكن ليست كل الجداول الرياضية تشمل النسب المثلثية للقاطع  $\secant$  أو قاطع التمام  $\cscant$  وعند استخدام الحاسبات نستخدم الدالة المثلثية لجيب الزاوية  $\sin 15^\circ$  لأنه لا يوجد مفتاح للدالة يمثل قاطع التمام  $\cscant$  للزاوية.

| الحل التقليدى<br>Manual Solution |    | الحل باستخدام<br>الحاسبات<br>Calculator Solution |
|----------------------------------|----|--------------------------------------------------|
| $\csc 15^\circ = \frac{x}{12}$   | or | $\sin 15^\circ = \frac{12}{x}$                   |
| $x = 12 \csc 15^\circ$           |    | $x = \frac{12}{\sin 15^\circ}$                   |
| $x = 12(3.86)$                   |    | $x = \frac{12}{0.26}$                            |
| $x = 46.32$                      |    | $x = 46.15$                                      |
| $x = 46 \text{ m}$               |    | $x = 46.3644$                                    |
|                                  |    | $x = 46 \text{ m}$                               |

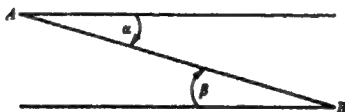
طول السلك المطلوب هو 46 متر.

## زوايا الارتفاع والانخفاض

### Angles of Depression and Elevation

زاوية الانخفاض هى الزاوية المحصورة بين المستوى الأفقى ومستوى النظر إلى أسفل نحو الهدف. وزاوية الارتفاع هى الزاوية المحصورة بين المستوى الأفقى ومستوى النظر إلى أعلى نحو الهدف.

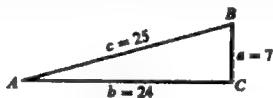
فى شكل 3-5 زاوية الانخفاض من النقطة  $A$  إلى النقطة  $B$  هى زاوية  $\alpha$  وزاوية الارتفاع من النقطة  $B$  إلى النقطة  $A$  هى زاوية  $\beta$ . وكل من زاوية الارتفاع والانخفاض مقاسة بالنسبة للمستوى الأفقى وهما خطان متوازيان وفى جهتين مختلفتين من القاطع  $AB$  ولذلك فهما زاويتان متساويتان؛ أى أن  $\alpha = \beta$ .



شكل 3-5

مسألة محلولة 3.1 أوجد الدوال المثلثية للزوايا الحادة للمثلث القائم الزاوية  $ABC$  كما هو موضح بشكل 3-6، بمعلومية أطوال ضلعين  $b = 24$  و  $c = 25$ .

**Solved Problem 3.1** Find the trigonometric functions of the acute angles of the right triangle  $ABC$ , Figure 3-6, given  $b = 24$  and  $c = 25$ .



شكل 3-6

الحل: بتطبيق نظرية فيثاغورث

$$a^2 = c^2 - b^2 = (25)^2 - (24)^2 = 49, a = 7$$

الدوال المثلثية للزاوية  $A$  هى:

$$\sin A = \frac{\text{opposite side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c} = \frac{7}{25}$$

$$\cos A = \frac{\text{adjacent side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c} = \frac{24}{25}$$

$$\tan A = \frac{\text{opposite side}}{\text{adjacent side}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{a}{b} = \frac{7}{24}$$

$$\cot A = \frac{\text{adjacent side}}{\text{opposite side}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{b}{a} = \frac{24}{7}$$

$$\sec A = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent side}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{c}{b} = \frac{25}{24}$$

$$\csc A = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite side}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{c}{a} = \frac{25}{7}$$

وبالمثل زاوية B:

$$\sin B = 24/25$$

$$\cos B = 7/25$$

$$\tan B = 24/7$$

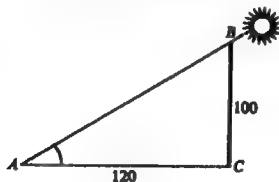
$$\csc B = 25/24$$

$$\sec B = 25/7$$

$$\cot B = 7/24$$

مسألة محلولة 3.2 شجرة طولها 100 قدم تصنع ظلًا طوله 120 قدم كما هو موضح بشكل 3-7. أوجد زاوية الارتفاع للشمس.

**Solved Problem 3.2** A tree 100 ft tall casts a shadow 120 ft long, as shown in Figure 3-7. Find the angle of elevation of the sun.



شكل 3-7

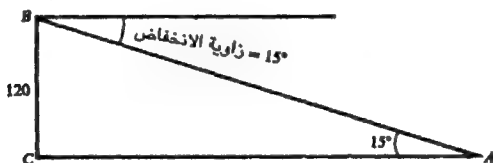
الحل: من الشكل 3-7  $CB=100$  ft ،  $AC=120$  ft والمطلوب إيجاد زاوية  $A$

$$\tan A = \frac{CB}{AC} = \frac{100}{120} = 0.83$$

$$A = 40^\circ$$

مسألة محلولة 3.3 من قمة فئار ارتفاعه 120 متر عن سطح البحر كانت زاوية الانخفاض لقارب هي  $15^\circ$  كما هو بشكل 3-8. كم يبعد القارب عن الفئار؟

**Solved Problem 3.3** From the top of a lighthouse, 120 m above the sea, the angle of depression of a boat is  $15^\circ$ , as shown in Figure 3-8. How far is the boat from the lighthouse?



شكل 3-8

الحل: من المعلوم في المثلث القائم الزاوية الموضح بشكل 3-8،  $A = 15^\circ$ ،  $CB = 120$  m، فإن خطوات الحل كالتالي:

$$\cot A = AC/CB$$

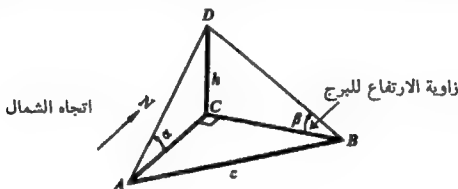
$$AC = CB \cot A = 120 \cot 15^\circ = 120(3.73) = 447.6 \text{ m}$$

يبعد القارب 447.6 متر عن الفئار.



**مسألة محلولة 3.4** أنشأ برج على مستوى سطح الأرض شمالاً من نقطة  $A$  وغرباً من نقطة  $B$ ، فإذا كان البعد بين النقطتين  $A$ ،  $B$  هو  $c$  قدم. وإذا كانت زاويتا ارتفاع البرج المقاسة من نقطتين  $A$ ،  $B$  هما  $\alpha$ ،  $\beta$  على الترتيب. أوجد ارتفاع البرج  $h$  كما هو موضح بشكل 3-9.

**Solved Problem 3.4** A tower standing on level ground is due north of point  $A$  and due west of point  $B$ , a distance  $c$  ft from  $A$ . If the angles of elevation of the top of the tower as measured from  $A$  and  $B$  are  $\alpha$  and  $\beta$ , respectively, find the height  $h$  of the tower, as shown in Figure 3-9.



شكل 3-9

**الحل:** في المثلث القائم الزاوية  $ACD$  كما هو موضح بشكل 3-9 ومن  $\cot \alpha = AC/h$  وفي المثلث القائم الزاوية  $BCD$   $\cot \beta = BC/h$ . ومن العلاقتين المثلثيتين نجد أن:  $AC = h \cot \alpha$  و  $BC = h \cot \beta$  ومن المثلث القائم الزاوية  $ABC$  نجد أن:  $(AC)^2 + (BC)^2 = c^2$  وبالتعويض عن قيمة  $AC$ ،  $BC$

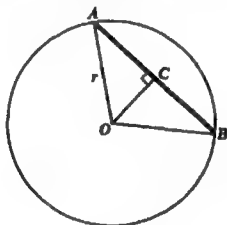
$$h^2 (\cot \alpha)^2 + h^2 (\cot \beta)^2 = c^2 \Rightarrow h^2 ((\cot \alpha)^2 + (\cot \beta)^2) = c^2$$

ارتفاع البرج المطلوب:

$$h = \frac{c}{\sqrt{(\cot \alpha)^2 + (\cot \beta)^2}}$$

مسألة محلولة 3.5 تم توزيع فتحات بانتظام على محيط دائرة فإذا كانت المسافة بين مركزي فتحتين متتاليتين معطاة بالعلاقة الآتية  $d = 2r \sin (180^\circ/n)$  حيث أن  $r$  هو نصف قطر الدائرة،  $n$  هو عدد الفتحات الموزعة على محيط الدائرة. أوجد المسافة  $d$  عندما تكون  $r = 20$  in و  $n = 4$ .

**Solved Problem 3.5** If holes are to be spaced regularly on a circle, show that the distance  $d$  between the centers of two successive holes is given by  $d = 2r \sin (180^\circ/n)$ , where  $r$  = the radius of the circle and  $n$  = the number of holes. Find  $d$  when  $r = 20$  in and  $n = 4$ .



شكل 3-10

الحل: كما هو موضح بشكل 3-10 نفرض أن  $A$  و  $B$  هما مركزي الفتحتين المتتاليتين على محيط دائرة نصف قطرها  $r$  ومركزها  $O$ . ونفرض أن منتصف زاوية الرأس  $O$  للمثلث  $AOB$  ينصف الوتر  $AB$  وعمودى عليه أى أن المثلث  $AOC$  قائم الزاوية فى  $C$ .

$$\sin \angle AOC = \frac{AC}{r} = \frac{d/2}{r} = \frac{d}{2r}$$

بضرب الطرفين فى الوسطين:

$$\begin{aligned} d &= 2r \sin \angle AOC \\ &= 2r \sin \frac{1}{2} \angle AOB \end{aligned}$$

$$= 2r \sin \frac{1}{2} \left( \frac{360^\circ}{n} \right)$$

$$= 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

حيث أن:

$$r = 20 \text{ and } n = 4, d = 2 \cdot 20 \sin 45^\circ = 2 \cdot 20 \left( \sqrt{2} / 2 \right) = 20\sqrt{2}$$



## الفصل الرابع

### تطبيقات عملية

### Practical Applications

فى هذا الفصل:

✓ الاتجاه الزاوى

✓ المتجهات

✓ جمع المتجهات

✓ مركبات المتجه

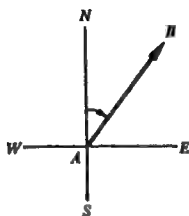
✓ الملاحه الجوية

✓ المستوى المائل

### Bearing

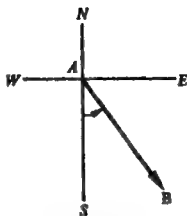
### الاتجاه الزاوى

يعرف الاتجاه الزاوى لنقطة  $B$  من نقطة  $A$  فى مستوى أفقى بأنه الزاوية (وهى دائماً زاوية حادة) التى يصنعها الشعاع المرسوم من نقطة  $A$  إلى نقطة  $B$  مع الاتجاه الشمالى الجنوبى المار بنقطة  $A$ . ويقرأ الاتجاه الزاوى من اتجاه الشمال أو الجنوب تجاه الشرق أو الغرب. وتكون الزاوية التى تعبر عن الاتجاه الزاوى مقدرة بالدرجات والدقائق. على سبيل المثال انظر شكل 4-1.



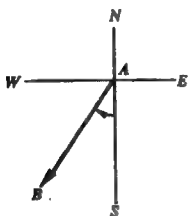
N35°E

اتجاه زاوی 35° اتجاه شمال الشرق



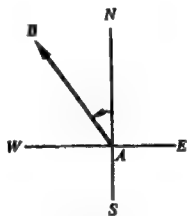
S35°E

اتجاه زاوی 35° اتجاه جنوب الشرق



S35°W

اتجاه زاوی 35° اتجاه جنوب الغرب

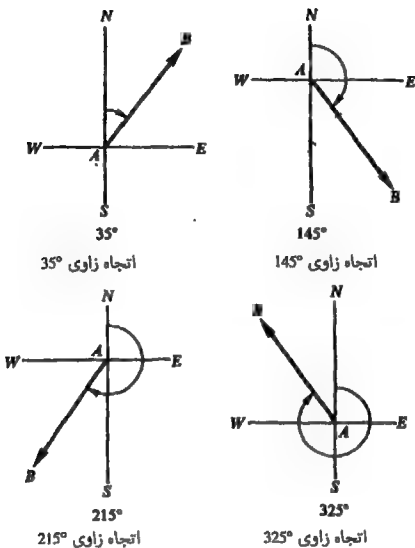


N35°W

اتجاه زاوی 35° اتجاه شمال الغرب

#### شكل 4-1

من الشائع في علوم الطيران استخدام تعبير الاتجاه الزاوي Bearing للنقطة B من النقطة A بدلاً من اتجاه الشعاع AB عن خط الشمال من خلال نقطة A مقاسة في اتجاه دوران عقارب الساعة من اتجاه الشمال (هذا يعني من اتجاه الشمال إلى اتجاه الشرق) على سبيل المثال انظر شكل 4-2.



شکل 4-2

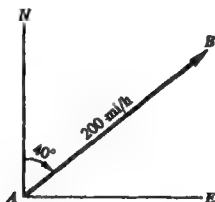
## Vectors

## المتجهات

الكميات المتجهة Vector Quantity هي كميات طبيعية لها مقدار واتجاه مثل القوة أو السرعة. ويمكن تمثيل الكميات المتجهة بقطعة مستقيمة (سهم) تسمى المتجه. واتجاه المتجه هو الكمية المعطاة وطول المتجه يتناسب مع مقدار هذه الكمية.

مثال 4.1 طائرة تطير بسرعة 200 ميل/ساعة في اتجاه زاوی 40° شمال الشرق. المتجه AB يمثل السرعة. كما هو واضح من شكل 4-3.

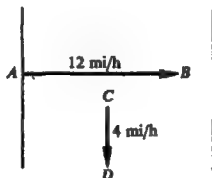
**Example 4.1** An airplane is traveling  $N40^\circ E$  at 200 mi/h. Its velocity is represented by the vector  $AB$  in Figure 4-3.



شكل 4-3

مثال 4.2 قارب سرعة محركه 12 ميل/ساعة في الماء الساكن وجه عبر نهر سرعة تيار الماء فيه 4 ميل/ساعة. كما هو واضح من شكل 4-4. المتجه  $CD$  يمثل سرعة التيار والمتجه  $AB$  بنفس مقياس الرسم يمثل سرعة القارب في الماء الساكن. ولذلك فإن المتجه  $AB$  يساوي ثلاثة أمثال المتجه  $CD$ .

**Example 4.2** A motor boat having the speed 12 mi/h in still water is headed directly across a river whose current is 4 mi/h. In Figure 4-4, the vector  $CD$  represents the velocity of the current and the vector  $AB$  represents, to the same scale, the velocity of the boat in still water. Thus, vector  $AB$  is three times as long as vector  $CD$ .

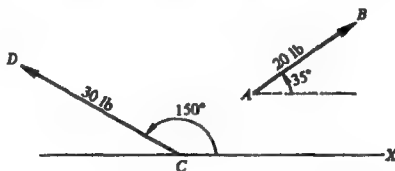


شكل 4-4



مثال 4.3 فى شكل 4-5 المتجه AB يمثل قوة مقدارها 20 lb ويميل بزاوية مقدارها  $35^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، والمتجه CD يمثل قوة مقدارها 30 lb ويميل بزاوية مقدارها  $150^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. يستخدم مقياس رسم واحد عند رسم المتجهين.

**Example 4.3** In Figure 4-5, vector **AB** represents a force of 20 lb making an angle of  $35^\circ$  with the positive direction on the *x* axis and vector **CD** represents a force of 30 lb at  $150^\circ$  with the positive direction on the *x* axis. Both vectors are drawn to the same scale.



شكل 4-5

يقال إن المتجهين متساويان إذا كان المتجهان متساويين فى المقدار والاتجاه.



### تذكرا!

يمكن رسم المتجه فى أى مكان فى المستوى مع عدم تغيير المقدار والاتجاه للمتجه.

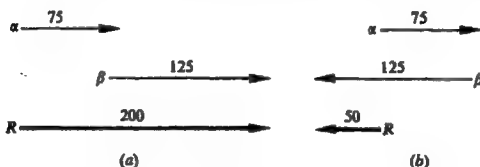
## Vector Addition

## جمع المتجهات

المحصلة Resultant أو الجمع الاتجاهى لمجموعة من المتجهات هى عبارة عن متجه فى المستوى له نفس تأثير مجموعة المتجهات الأصلية متحدة مع بعضها البعض.

المحصلة  $R$  للمتجهين  $\alpha$ ،  $\beta$  فى اتجاه واحد هى المجموع الجبرى لقيمة المتجهين فى نفس الاتجاه. انظر شكل 4-6(a).

إذا كان المتجهان فى اتجاهين متضادين، فإن محصلتهما  $R$  هى الفرق بين مقدار المتجهين (المقدار الأكبر - المقدار الأصغر) ويكون اتجاه المحصلة فى اتجاه المقدار الأكبر لأحد المتجهين. شكل 4-6(b).



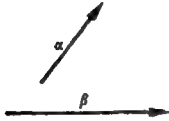
شكل 4-6

فى كل الحالات الأخرى يمكن استنتاج مقدار واتجاه المحصلة بإحدى الطرق الآتية:

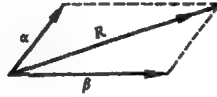
(1) طريقة متوازي الأضلاع Parallelogram Method: نمثل المتجهين بضلعين متجاورين من متوازي أضلاع من نقطة  $O$  فى نفس المستوى للمتجهين، ونكمل شكل متوازي الأضلاع ليكون القطر المرسوم من نقطة  $O$  هو محصلة المتجهين أو المجموع الجبرى للمتجهين المعلومين. وشكل 4-7(b) يوضح المحصلة  $R$  للمتجهين  $\alpha$ ،  $\beta$  الموضحين بشكل 4-7(a).

(2) طريقة مثلث القوى Triangle Method: نختار أحد المتجهين ونمثله بضلع من أضلاع مثلث بداية من نقطة  $O$ ، ومن نهاية الضلع نمثل المتجه الآخر بالضلع الثانى من أضلاع المثلث. ومن الشكل نستنتج أن الضلع الثالث الذى يقفل المثلث يمثل محصلة

المتجهين المعلومين وفي الاتجاه الدورى المضاد. وشكل (c) 4-7 و (d) 4-7 يوضح المحصلة  $R$  للمتجهين  $\alpha$  و  $\beta$ .

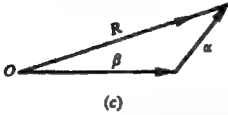


(a)

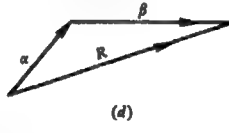


(b)

طريقة متوازي الأضلاع Parallelogram Method



(c)



(d)

طريقة مثلث القوى Triangle Method

شكل 4-7

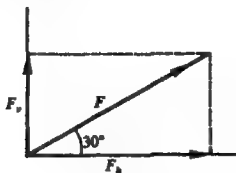
## Components of a Vector

## مركبات المتجه

مركبة المتجه  $\alpha$  على المستقيم  $L$  هي المسقط العمودى للمتجه على المستقيم  $L$ . وهى غالباً ما تكون مفيدة جداً فى عملية تحليل المتجهة فى اتجاهين متعامدين.

مثال 4.4 المركبة الأفقية للقوة  $F$  فى شكل 4-8 هى:  $F_h = F \cos 30^\circ$  والمركبة الرأسية  $F_v = F \sin 30^\circ$  مع ملاحظة أن  $F$  هى المجموع الجبرى لمحصلة القوتين  $F_v$  و  $F_h$ .

**Example 4.4** In Figure 4-8, the force  $F$  has horizontal component  $F_h = F \cos 30^\circ$  and vertical component  $F_v = F \sin 30^\circ$ . Note that  $F$  is the vector sum or resultant of  $F_h$  and  $F_v$ .



شكل 4-8

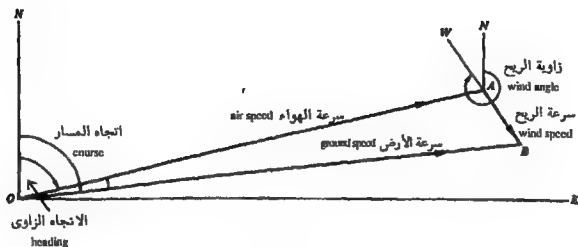
## Air Navigation

## الملاحة الجوية

الاتجاه الزاوى Heading هو اتجاه الطيران للطائرة (يحدد الاتجاه من قراءة البوصلة). ويقاس الاتجاه الزاوى فى اتجاه دوران عقارب الساعة من الشمال. ويعبر عنه بالدرجات والدقائق. ويحدد مابين السرعات سرعة الطائرة فى الهواء الساكن. ومسار الطائرة Course هو الاتجاه النسبى لحركة الطائرة بالنسبة للأرض ويقاس المسار فى اتجاه دوران عقارب الساعة من الشمال.

السرعة النسبية الأرضية للطائرة Ground Speed هى سرعة الطائرة بالنسبة للأرض.

زاوية الانسياق Drift Angle (زاوية الريح) وهى الفرق (الموجب) بين الاتجاه الزاوى والمسار.



شكل 4-9

في شكل 4-9 :  $ON$  هو خط الشمال الحقيقي من خلال نقطة  $O$ .  
 $\angle NOA$  هو الاتجاه الزاوى.  
 $OA$  = سرعة الطائرة في الهواء الساكن.  
 $AN$  هو خط الشمال الحقيقي من خلال نقطة  $A$ .  
 $\angle NAW$  هي زاوية الريح مقاسة في اتجاه دوران عقارب الساعة في اتجاه خط الشمال.  
 $AB$  = سرعة الريح.  
 $\angle NOB$  اتجاه المسار.  
 $OB$  = السرعة النسبية الأرضية.  
 $\angle AOB$  زاوية الانسياق

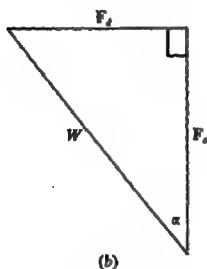
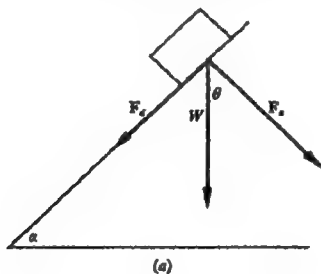
In Figure 4-9:  $ON$  is the true north line through  $O$   
 $\angle NOA$  is the heading  
 $OA$  = the airspeed  
 $AN$  is the true north line through  $A$   
 $\angle NAW$  is the wind angle, measured clockwise from the north line  
 $AB$  = the windspeed  
 $\angle NOB$  is the course  
 $OB$  = the groundspeed  
 $\angle AOB$  is the drift angle

لاحظ أن هناك ثلاثة متجهات: المتجه  $OA$  يمثل سرعة الهواء والاتجاه الزاوي، والمتجه  $AB$  يمثل اتجاه وسرعة الريح، والمتجه  $OB$  يمثل السرعة النسبية الأرضية والمسار. متجه السرعة النسبية الأرضية هو محصلة متجه سرعة الطائرة ومتجه سرعة الريح.

## Inclined Plane

## المستوى المائل

جسم وزنه  $W$  موضوع على مستوى مائل وزاوية ميل المستوى على الأفقى  $\alpha$  فإذا كانت المركبة الأفقية للوزن في اتجاه ميل المستوى  $F_d$ .

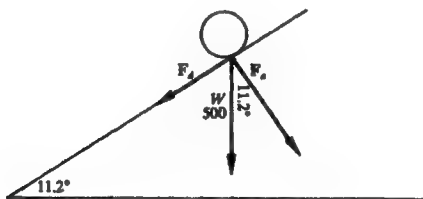


شكل 4-10

والمركبة الرأسية للوزن في اتجاه عمودي على المستوى إلى أسفل  $F_n$ .  
ولذلك فإن  $F_n$  و  $F_a$  هي مركبات متجه الوزن  $W$ . انظر شكل 4-10.

مثال 4.5 برميل وزنه 500 lb يستقر على مستوى مائل يميل بزاوية  $11.2^\circ$  على المستوى الأفقى. أوجد القوة اللازمة لمنع البرميل من الانزلاق إلى أسفل المستوى ثم أوجد رد الفعل العمودي على المستوى. (مع إهمال الاحتكاك).

**Example 4.5** A 500-lb barrel rests on an  $11.2^\circ$  inclined plane. What is the minimum force (ignoring friction) needed to keep the barrel from rolling down the incline and what is the force the barrel exerts against the surface of the inclined plane? (See Figure 4-11.)



شكل 4-11

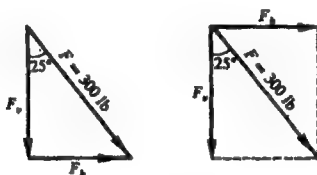
$$F_a = 500 \sin 11.2^\circ = 500(0.1942) = 97.1 \text{ lb}$$

$$F_n = 500 \cos 11.2^\circ = 500(0.9810) = 491 \text{ lb}$$

ومن الناتج نستنتج أن أقل قوة لازمة لمنع البرميل من الانزلاق إلى أسفل هي 97.1 lb ورد الفعل العمودي للمستوى هو 491 lb.

مسألة محلولة 4.1 عمود تلغراف مثبت رأسياً بواسطة سلك مشدود يميل على العمود بزاوية  $25^\circ$  فإذا كانت قوة الشد في السلك  $300 \text{ lb}$ . أوجد المركبة الأفقية  $F_h$  والمركبة الرأسية  $F_v$  لقوة الشد في السلك  $F$ . انظر شكل 4-12.

**Solved Problem 4.1** A telegraph pole is kept vertical by a guy wire which makes an angle of  $25^\circ$  with the pole and which exerts a pull of  $F = 300 \text{ lb}$  on the top. Find the horizontal and vertical components  $F_h$  and  $F_v$  of the pull  $F$ . See Figure 4-12.



شكل 4-12

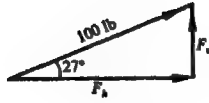
$$F_h = 300 \sin 25^\circ = 300(0.4226) = 127 \text{ lb}$$

$$F_v = 300 \cos 25^\circ = 300(0.9063) = 272 \text{ lb}$$

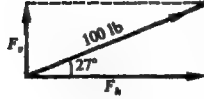
مسألة محلولة 4.2 يجز رجل زحافة بواسطة حبل يميل على الأفقى بزاوية  $27^\circ$  وذلك بقوة مقدارها  $100 \text{ lb}$ . (a) أوجد المركبة الأفقية لقوة الشد والمركبة الرأسية. (b) أوجد قوة الشد المطلوبة إذا كانت المركبة الأفقية للقوة هي  $100 \text{ lb}$  في مستوى الأرض أفقياً.

**Solved Problem 4.2** A man pulls a rope attached to a sled with a force of  $100 \text{ lb}$ . The rope makes an angle of  $27^\circ$  with the ground. (a) Find the effective pull tending to move the sled along the ground and the effective pull tending to lift the sled vertically. (b) Find the force which the man must exert in order that the effective force tending to move the sled along the ground is  $100 \text{ lb}$ .

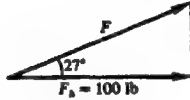




شكل 4-13



شكل 4-14



شكل 4-15

الحل:

(a) في شكل 4-13، وشكل 4-14 تم تحليل قوة الشد 100 lb إلى مركبة أفقية  $F_h$  ومركبة رأسية  $F_v$  على الترتيب. ولذلك فإن  $F_h$  هي قوة الشد الأفقية،  $F_v$  هي قوة الشد الرأسية.

$$F_h = 100 \cos 27^\circ = 100(0.8910) = 89 \text{ lb}$$

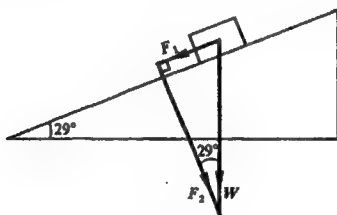
$$F_v = 100 \sin 27^\circ = 100(0.4540) = 45 \text{ lb}$$

(b) كما هو موضح بشكل 4-15 المركبة الأفقية لقوة الشد المطلوبة  $F$  هي  $F_h = 100 \text{ lb}$  إذن

$$F = 100 / \cos 27^\circ = 100 / 0.8910 = 112 \text{ lb}$$

مسألة محلولة 4.3 جسم وزنه  $W = 500 \text{ lb}$  يستقر على منحدر يميل على الأفقى زاوية مقدارها  $29^\circ$ . (a) أوجد القوة اللازمة لتحريك الجسم أسفل المنحدر ورد الفعل العمودى للمستوى. (b) ما هى أقل قوة لازمة لمنع الجسم من الانزلاق إلى أسفل المستوى مع إهمال الاحتكاك.

**Solved Problem 4.3** A block weighing  $W = 500 \text{ lb}$  rests on a ramp inclined  $29^\circ$  with the horizontal. (a) Find the force tending to move the block down the ramp and the force of the block on the ramp. (b) What minimum force must be applied to keep the block from sliding down the ramp? Neglect friction.



شكل 4-16

الحل:

(a) بالرجوع إلى شكل 4-16 نحلل الوزن إلى مركبتين  $F_1$ ،  $F_2$  على التوالى. إحداهما موازية للمستوى  $F_1$  والأخرى عمودية على المستوى  $F_2$ . حيث أن  $F_1$  هى القوة التى تسبب حركة الجسم إلى أسفل المستوى و  $F_2$  هى قوة الجسم المؤثرة على سطح المستوى.

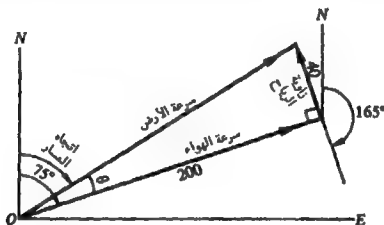
$$F_1 = W \sin 29^\circ = 500(0.4848) = 242 \text{ lb}$$

$$F_2 = W \cos 29^\circ = 500(0.8746) = 437 \text{ lb}$$

(b) 242 lb إلى أعلى المنحدر.

مسألة محلولة 4.4 إذا كان الاتجاه الزاوي لطائرة  $75^\circ$  من خط الشمال وسرعة الطائرة 200 ميل/ساعة. أوجد السرعة النسبية الأرضية واتجاه المسار إذا كانت سرعة الرياح 40 ميل/ساعة بزاوية  $165^\circ$  من خط الشمال. انظر شكل 4-17

**Solved Problem 4.4** The heading of an airplane is  $75^\circ$  and the airspeed is 200 mi/h. Find the groundspeed and course if there is a wind of 40 mi/h from  $165^\circ$ . Refer to Figure 4-17.



شكل 4-17

الحل:

نرسم أولاً متجه السرعة من نقطة  $O$  ويليه متجه سرعة الرياح ثم نقفل المثلث.

$$\text{groundspeed (سرعة الأرض)} = \sqrt{(200)^2 + (40)^2} = 204 \text{ mi/h,}$$

$$\tan \theta = 40/200 = 0.2000 \quad \text{and} \quad \theta = 11^\circ 20'$$

اتجاه المسار course

$$\text{course (اتجاه المسار)} = 75^\circ - \theta = 63^\circ 40'$$



## الفصل الخامس

### الاختزال لدوال الزوايا الحادة الموجبة

### Reduction to Functions of Positive Acute Angles

فى هذا الفصل:

✓ الزوايا المتطابقة

✓ دوال الزاوية السالبة

✓ الزوايا المنتسبة

✓ قيمة الدالة للزوايا

### Coterminal Angles

### الزوايا المتطابقة

نفرض أن  $\theta$  هى أى زاوية: إذن

$$\sin(\theta + n360^\circ) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + n360^\circ) = \cos \theta$$

$$\tan(\theta + n360^\circ) = \tan \theta$$

$$\cot(\theta + n360^\circ) = \cot \theta$$

$$\sec(\theta + n360^\circ) = \sec \theta$$

$$\csc(\theta + n360^\circ) = \csc \theta$$

حيث  $n$  هى أى عدد صحيح موجب أو سالب أو يساوى الصفر.

### Example 5.1

### مثال 5.1

$$(a) \sin 400^\circ = \sin (40^\circ + 360^\circ) = \sin 40^\circ$$

$$(b) \cos 850^\circ = \cos (130^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \cos 130^\circ$$

$$(c) \tan (-1000^\circ) = \tan (80^\circ - 3 \cdot 360^\circ) = \tan 80^\circ$$

إذا كان قياس زاوية  $\theta$  بالتقدير الدائري فإن:

$$\sin (x + 2n\pi) = \sin x$$

$$\cos (x + 2n\pi) = \cos x$$

$$\tan (x + 2n\pi) = \tan x$$

$$\cot (x + 2n\pi) = \cot x$$

$$\sec (x + 2n\pi) = \sec x$$

$$\csc (x + 2n\pi) = \csc x$$

حيث أن  $n$  أى عدد صحيح.

## دوال الزاوية السالبة Functions of a Negative Angle

نفرض أن زاوية  $\theta$  هى أى زاوية. إذن:

$$\sin (-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos (-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan (-\theta) = -\tan \theta$$

$$\cot (-\theta) = -\cot \theta$$

$$\sec (-\theta) = \sec \theta$$

$$\csc (-\theta) = -\csc \theta$$

## Reference Angles

## الزوايا المنتسبة

إذا كانت زاوية  $\theta$  هى زاوية رُبعية فإننا لا نحتاج زاوية منتسبة. وإذا أمكن كتابة أى زاوية على صورة  $\theta + n \cdot 360^\circ$  حيث أن  $n$  عدد صحيح و  $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$  فإنه يمكن إيجاد زوايا منتسبة للزوايا من  $0^\circ$  إلى  $360^\circ$ .



ويمكن تعريف الزاوية المنتسبة  $R$  للزاوية  $\theta$  فى الوضع القياسى على أنه الزاوية الحادة الموجبة بين محور السينات والضلع الخارجى للزاوية  $\theta$ . قيم الدوال الست للزاوية المنتسبة  $R$  للزاوية  $\theta$  يتفق مع قيمة الدوال للزاوية  $\theta$  ربما الاختلاف فى الإشارة فقط. ويتم تحديد إشارة منسوب الزاوية  $R$  حسب الربع الذى تقع فيه زاوية  $\theta$  ولذلك فإن أى دالة للزاوية  $\theta$  يمكن التعبير عنها بالزاوية الحادة للزاوية المنتسبة  $R$  ويستخدم الجدول التالى فى إيجاد قيمة الدوال المثلثية لأى زاوية.

| ربع الزاوية<br>Quadrant for $\theta$ | العلاقة<br>Relationship  | إشارات الدالة<br>Function Signs |
|--------------------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| I                                    | $R = \theta$             | كل الدوال المثلثية موجبة        |
| II                                   | $R = 180^\circ - \theta$ | $\csc R$ ، $\sin R$ موجبة       |
| III                                  | $R = \theta - 180^\circ$ | $\cot R$ ، $\tan R$ موجبة       |
| IV                                   | $R = 360^\circ - \theta$ | $\sec R$ ، $\cos R$ موجبة       |

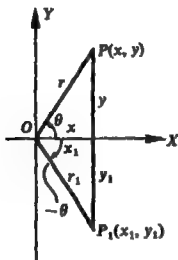
## قيمة الدالة للزوايا

### Angles with a Given Function Value

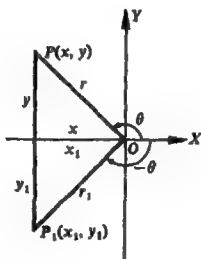
قيمة الدوال للزوايا المتطابقة متساوية وهناك عدد غير محدود من الزوايا متساوية القيمة للدوال المثلثية للزوايا. وحتى عند تحديد الزوايا فى المرحلة من  $0^\circ$  إلى  $360^\circ$  يوجد عادة زاويتان لهما نفس قيمة الدالة وكل الزوايا التى تتساوى فى قيمة الدالة لها نفس الزاوية المنتسبة. وأرباع الزاوية تحددها الإشارة لقيمة الدالة. والعلاقات المثلثية فى الجزء السابق تستخدم لإيجاد الزاوية بفرض معرفة الزاوية المنتسبة.

مسألة محلولة 5.1 استنتج علاقات الدوال للزاوية  $-\theta$  بمعلومية الزاوية  $\theta$ .

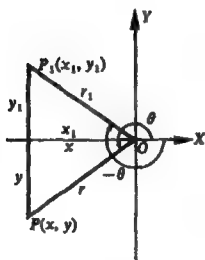
**Solved Problem 5.1** Derive formulas for the functions of  $-\theta$  in terms of  $\theta$ .



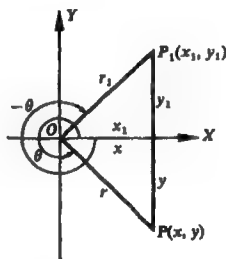
(a)



(b)



(c)



(d)

شكل 5-1

في شكل 5-1 تم تحديد زاوية  $\theta$ ،  $-\theta$  وهما متساويتان عدديًا. وتقع نقطة  $P(x, y)$  على الضلع الخارجى لزاوية  $\theta$  ونقطة  $P_1(x_1, y_1)$  على الضلع الخارجى لزاوية  $-\theta$  على الترتيب حيث أن:  $OP = OP_1$  وفى كل شكل من هذه الأشكال الأربعة يتطابق المثلثان،  $r_1 = r$  و  $x_1 = x$  و  $y_1 = -y$ . إذن:



$$\sin (-\theta) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin \theta$$

$$\cos (-\theta) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\tan (-\theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$$

$$\cot (-\theta) = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\cot \theta$$

$$\sec (-\theta) = \frac{r_1}{x_1} = \frac{r}{x} = \sec \theta$$

$$\csc (-\theta) = \frac{r_1}{y_1} = \frac{r}{-y} = -\frac{r}{y} = -\csc \theta$$

وعدا بعض هذه الحالات عندما تكون الدالة غير معرفة والعلاقات السابقة أيضاً حقيقية عندما تكون زاوية  $\theta$  زاوية ربعية يتحقق بفرض أن الزوايا  $0^\circ$  و  $-0^\circ$  و  $90^\circ$  و  $-90^\circ$  و  $270^\circ$  و  $-180^\circ$  و  $180^\circ$  و  $-270^\circ$  و  $90^\circ$  هي زوايا متطابقة.

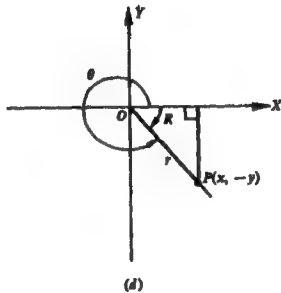
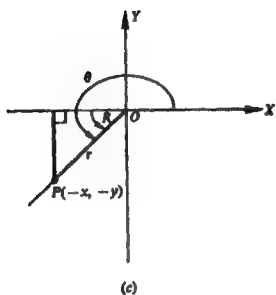
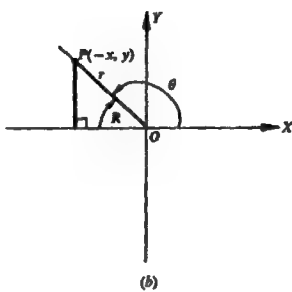
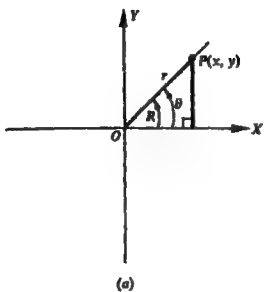
وعلى سبيل المثال:

$$\sin (-0^\circ) = \sin 0^\circ = 0 = -\sin 0^\circ, \sin(-90^\circ) = \sin 270^\circ = -1 = -\sin 90^\circ,$$

$$\cos(-180^\circ) = \cos 180^\circ \text{ و } \cot(-270^\circ) = \cot 90^\circ = 0 = -\cot 270^\circ.$$

**مسألة محلولة 5.2** حقق تساوى الدوال المثلثية لزاوية  $\theta$  ومنسوب الزاوية  $R$  عندما تكون:  $x > 0$  و  $y > 0$  و  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Solved Problem 5.2** Verify the equality of the trigonometric functions for  $\theta$  and its reference angle  $R$  where  $x > 0$ ,  $y > 0$ , and  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .



شكل 5-2

الحل:

(a) عندما تقع  $\theta$  فى الربع الأول انظر شكل 5-2(a).

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \sin R$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \cos R$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \tan R$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \cot R$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \sec R$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \csc R$$

(b) عندما تقع  $\theta$  فى الربع الثانى. انظر شكل 5-2(b).

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \sin R$$

$$\cos \theta = \frac{-x}{r} = -\left(\frac{x}{r}\right) = -\cos R$$

$$\tan \theta = \frac{y}{-x} = -\left(\frac{y}{x}\right) = -\tan R$$

$$\cot \theta = \frac{-x}{y} = -\left(\frac{x}{y}\right) = -\cot R$$

$$\sec \theta = \frac{r}{-x} = -\left(\frac{r}{x}\right) = -\sec R$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \csc R$$

(c) عندما تقع  $\theta$  فى الربع الثالث. انظر شكل 5-2(c).

$$\sin \theta = \frac{-y}{r} = -\left(\frac{y}{r}\right) = -\sin R$$

$$\cos \theta = \frac{-x}{r} = -\left(\frac{x}{r}\right) = -\cos R$$

$$\tan \theta = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan R$$

$$\cot \theta = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} = \cot R$$

$$\sec \theta = \frac{r}{-x} = -\left(\frac{r}{x}\right) = -\sec R$$

$$\csc \theta = \frac{r}{-y} = -\left(\frac{r}{y}\right) = -\csc R$$

(d) عندما تقع  $\theta$  في الربع الرابع. انظر شكل 5-2(d).

$$\sin \theta = \frac{-y}{r} = -\left(\frac{y}{r}\right) = -\sin R \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \cos R$$

$$\tan \theta = \frac{-y}{x} = -\left(\frac{y}{x}\right) = -\tan R \quad \cot \theta = \frac{x}{-y} = -\left(\frac{x}{y}\right) = -\cot R$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \sec R \quad \csc \theta = \frac{r}{-y} = -\left(\frac{r}{y}\right) = -\csc R$$

## الفصل السادس

### متغيرات ومنحنيات الدوال المثلثية

### Variations and Graphs of the Trigonometric Functions

فى هذا الفصل:

✓ التمثيل الخطى للدوال المثلثية

✓ متغيرات الدوال المثلثية

✓ التمثيل البيانى للدوال المثلثية

✓ الإزاحة الأفقية والرأسية

✓ الدوال الدورية

✓ منحنيات الجيب

### التمثيل الخطى للدوال المثلثية

### Line Representations of Trigonometric Functions

نفرض أن زاوية  $\theta$  هى زاوية معلومة فى الوضع القياسى. (انظر شكل 1-6 موقع زاوية  $\theta$  فى كل ربع من الأرباع الأربعة). ومن الرأس  $O$  كمركز نرسم دائرة نصف قطرها الوحدة لتقطع المحور الأساسى  $Ox$  للزاوية  $\theta$  فى  $A$ ، والاتجاه الموجب لمحور الصادات فى  $B$ ، والضلع الخارجى للزاوية  $\theta$

في  $P$ ، نرسم  $MP$  عمودى على  $OX$  ثم نرسم مماسين للدائرة من نقطة  $A$  و  $B$  ليقطع المماسين الضلع الخارجى للزاوية  $\theta$  أو امتداداه فى نقطتى  $R$  و  $Q$  على التوالي.



فى كل أجزاء الشكل 1-6 تتشابه المثلثات القائمة  $OMP$  و  $OQ$  و  $OBR$  ومن تشابه المثلثات نستنتج العلاقات المثلثية الآتية:

$$\sin \theta = \frac{MP}{OP} = MP$$

$$\cos \theta = \frac{OM}{OP} = OM$$

$$\tan \theta = \frac{MP}{OM} = \frac{AQ}{OA} = AQ$$

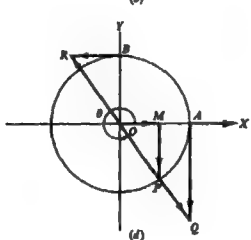
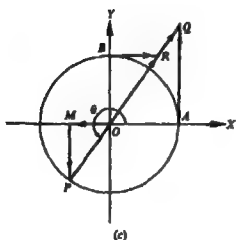
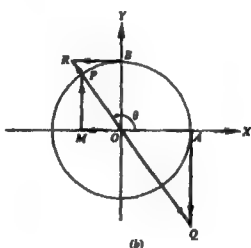
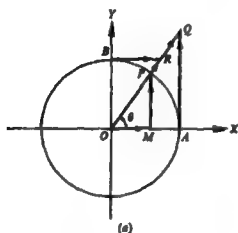
$$\cot \theta = \frac{OM}{MP} = \frac{BR}{OB} = BR$$

$$\sec \theta = \frac{OP}{OM} = \frac{OQ}{OA} = OQ$$

$$\csc \theta = \frac{OP}{MP} = \frac{OR}{OB} = OR$$

القطع المستقيمة  $MP$ ،  $OM$  و  $AQ$  هى قطع مستقيمة. وقيمة الدالة هى طول القطعة المستقيمة المناظرة وإشارة الدالة يحددها اتجاه القطعة المستقيمة. والقطع المستقيمة الموجبة  $OQ$  و  $OR$  تكون موجبة عند قياسها على الضلع الخارجى للزاوية وتكون سالبة عند قياسها على امتداد الضلع الخارجى للزاوية.

| As $\theta$<br>Increases from | $0^\circ$ to $90^\circ$                                           | $90^\circ$ to $180^\circ$                                           | $180^\circ$ to $270^\circ$                                          | $270^\circ$ to $360^\circ$                                        |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $\sin \theta$                 | <i>I.</i> from 0 to 1                                             | <i>D.</i> from 1 to 0                                               | <i>D.</i> from 0 to -1                                              | <i>I.</i> from -1 to 0                                            |
| $\cos \theta$                 | <i>D.</i> from 1 to 0                                             | <i>D.</i> from 0 to -1                                              | <i>I.</i> from -1 to 0                                              | <i>I.</i> from 0 to 1                                             |
| $\tan \theta$                 | <i>I.</i> from 0<br>without limit<br>(0 to $+\infty$ )            | <i>I.</i> from large<br>negative values<br>to 0 ( $-\infty$ to 0)   | <i>I.</i> from 0<br>without limit<br>(0 to $+\infty$ )              | <i>I.</i> from large<br>negative values<br>to 0 ( $-\infty$ to 0) |
| $\cot \theta$                 | <i>D.</i> from large<br>positive values<br>to 0 ( $+\infty$ to 0) | <i>D.</i> from 0<br>without limit<br>(0 to $-\infty$ )              | <i>D.</i> from large<br>positive values<br>to 0 ( $+\infty$ to 0)   | <i>D.</i> from 0<br>without limit<br>(0 to $-\infty$ )            |
| $\sec \theta$                 | <i>I.</i> from 1<br>without limit<br>(1 to $+\infty$ )            | <i>I.</i> from large<br>negative values<br>to -1 ( $-\infty$ to -1) | <i>D.</i> from -1<br>without limit<br>(-1 to $-\infty$ )            | <i>D.</i> from large<br>positive values<br>to 1 ( $+\infty$ to 1) |
| $\csc \theta$                 | <i>D.</i> from large<br>positive values<br>to 1 ( $+\infty$ to 1) | <i>I.</i> from 1<br>without limit<br>(1 to $+\infty$ )              | <i>I.</i> from large<br>negative values<br>to -1 ( $-\infty$ to -1) | <i>D.</i> from -1<br>without limit<br>(-1 to $-\infty$ )          |



شکل 6-1

## متغيرات الدوال المثلثية

### Variations of Trigonometric Functions

نفرض أن نقطة  $P$  تتحرك عكس دوران عقارب الساعة حول دائرة الوحدة بداية من نقطة  $A$  فإن  $\theta = \angle AOP$  تتغير باستمرار من  $0^\circ$  إلى  $360^\circ$ . لاحظ في شكل 6-1 كيفية تغير الدوال المثلثية. (تزايد  $I$  وتناقص  $D$ ).

## التمثيل البياني للدوال المثلثية

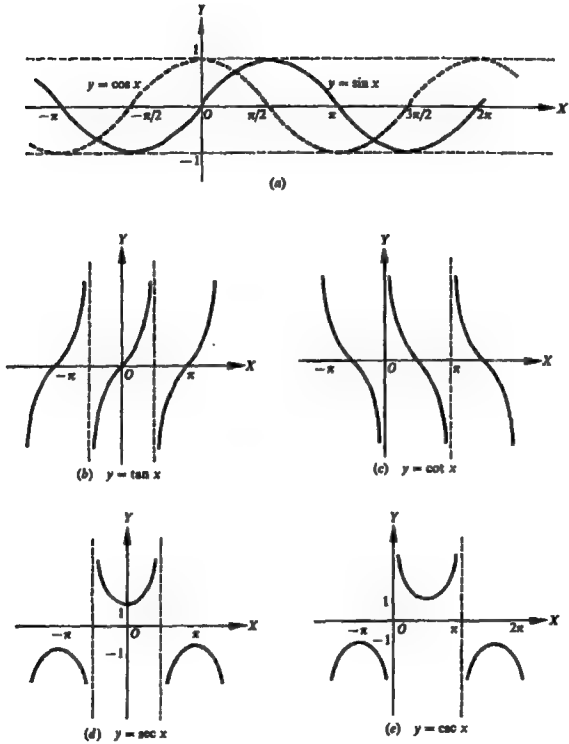
### Graphs of Trigonometric Functions

في الجدول التالي قيم الزاوية  $x$  معطاة بالتقدير الدائري وعلى أى حال الدوال المثلثية تكون غير معرفة لقيمة  $x$ ،  $\pm\infty$  مسجلة بدلاً من قيمة الدالة غير المعرفة. منحنيات الدوال المثلثية موضحة بشكل 6-2.

| $x$       | $y = \sin x$ | $y = \cos x$ | $y = \tan x$ | $y = \cot x$ | $y = \sec x$ | $y = \csc x$ |
|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0         | 0            | 1.00         | 0            | $\pm\infty$  | 1.00         | $\pm\infty$  |
| $\pi/6$   | 0.50         | 0.87         | 0.58         | 1.73         | 1.15         | 2.00         |
| $\pi/4$   | 0.71         | 0.71         | 1.00         | 1.00         | 1.41         | 1.41         |
| $\pi/3$   | 0.87         | 0.50         | 1.73         | 0.58         | 2.00         | 1.15         |
| $\pi/2$   | 1.00         | 0            | $\pm\infty$  | 0            | $\pm\infty$  | 1.00         |
| $2\pi/3$  | 0.87         | -0.50        | -1.73        | -0.58        | -2.00        | 1.15         |
| $3\pi/4$  | 0.71         | -0.71        | -1.00        | -1.00        | -1.41        | 1.41         |
| $5\pi/6$  | 0.50         | -0.87        | -0.58        | -1.73        | -1.15        | 2.00         |
| $\pi$     | 0            | -1.00        | 0            | $\pm\infty$  | -1.00        | $\pm\infty$  |
| $7\pi/6$  | -0.50        | -0.87        | 0.58         | 1.73         | -1.15        | -2.00        |
| $5\pi/4$  | -0.71        | -0.71        | 1.00         | 1.00         | -1.41        | -1.41        |
| $4\pi/3$  | -0.87        | -0.50        | 1.73         | 0.58         | -2.00        | -1.15        |
| $3\pi/2$  | -1.00        | 0            | $\pm\infty$  | 0            | $\pm\infty$  | -1.00        |
| $5\pi/3$  | -0.87        | 0.50         | -1.73        | -0.58        | 2.00         | -1.15        |
| $7\pi/4$  | -0.71        | 0.71         | -1.00        | -1.00        | 1.41         | -1.41        |
| $11\pi/6$ | -0.50        | 0.87         | -0.58        | -1.73        | 1.15         | -2.00        |
| $2\pi$    | 0            | 1.00         | 0            | $\pm\infty$  | 1.00         | $\pm\infty$  |



منحنيات الدوال المثلثية موضحة بشكل 6-2



شكل 6-2

## الإزاحة الأفقية والرأسية

### Horizontal and Vertical Shifts



الرسم البياني للدالة المثلثية يزاح رأسياً بإضافة الثابت غير الصفري إلى الدالة وأفقياً بإضافة العدد غير الصفري لزاوية الدالة المثلثية. وشكل 6-3 يوضح منحني الدالة

$y = \sin x$  والجزء الآخر من شكل 6-3 يوضح كيفية نقل المحاور للدالة.

نفرض أن  $c$  هو عدد موجب وإضافة هذا العدد إلى الدالة المثلثية يكون الناتج هو نقل المحاور للمنحني إلى أعلى بمقدار  $c$  (انظر شكل 6-3(b)). وبطرح هذا العدد من الدالة المثلثية يكون الناتج هو نقل المحاور للمنحني إلى أسفل بمقدار الوحدة  $c$  (انظر شكل 6-3(c)).

وعند إضافة العدد الموجب  $d$  إلى زاوية الدالة المثلثية يتم نقل محاور الدالة يساراً بمقدار العدد  $d$  (انظر شكل 6-3(d)) وتنقل يساراً بمقدار وحدات  $d$  عند طرح العدد الموجب  $d$  من زاوية الدالة (انظر شكل 6-3(e)).

### Periodic Functions

### الدوال الدورية

أى دالة  $f(x)$  للمتغير  $x$  والتي تتكرر قيمتها في دورات محدودة تسمى بالفترة Periodic. والمدى الأصغر لقيمة  $x$  والذي يتطابق مع دورة كاملة من قيمة الدالة يسمى "بفترة الدالة" ومن التمثيل البياني. لمنحنيات الدوال المثلثية نجد أن فترات منحنيات الدوال المثلثية للجيب وجيب التمام وقاطع الزاوية هي  $2\pi$  بينما للظل وظل تمام الزاوية هي  $\pi$ : ولذلك فإن

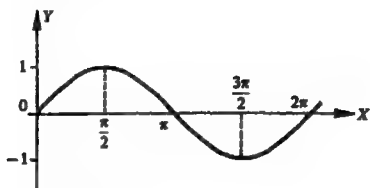
$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = \cos x \quad (1) \text{ ويمكن استنتاج المنحني } y = \cos x \text{ بنقل المنحني}$$

$$y = \sin x \text{ مسافة مقدارها } \frac{1}{2}\pi \text{ جهة اليسار.}$$

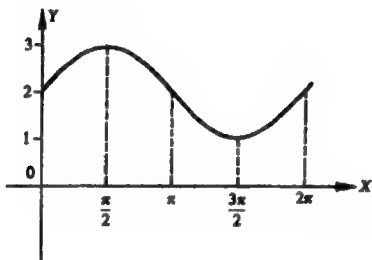
$$\csc\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = \sec x \quad (2) \text{ ويمكن استنتاج المنحني } y = \csc x \text{ بنقل المنحني}$$

$$y = \sec x \text{ مسافة مقدارها } \frac{1}{2}\pi \text{ جهة اليمين.}$$

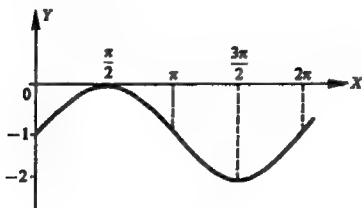
(a)  $y = \sin x$



(b)  $y = \sin x + 2$

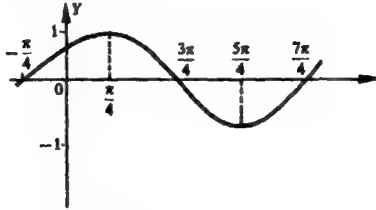


(c)  $y = \sin x - 1$

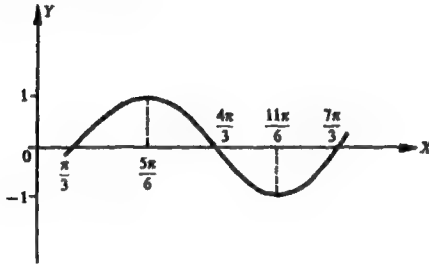


شكل 6-3

(d)  $y = \sin(x + \pi/4)$



(e)  $y = \sin(x - \pi/3)$



تابع شكل 6-3

## Sine Curves

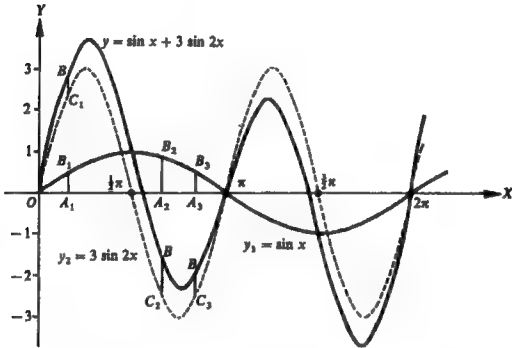
## منحنيات الجيب

السعة amplitude والدورة period للمنحنى  $y = \sin x$  هي 1 و  $2\pi$  على الترتيب. ولكل قيمة من قيم  $x$  للدالة  $y = a \sin x$  عندما  $a > 0$  هي حاصل ضرب  $a$  في الدالة  $y = \sin x$  ولذلك فإن سعة الدالة  $y = \sin x$  هي  $a$  والفترة  $2\pi$ . وأيضاً عندما  $bx = 2\pi$  و  $x = 2\pi/b$  فإن سعة الدالة  $y = \sin bx$  عندما  $b > 0$  هي 1 والفترة  $2\pi/b$ .

والمنحنى العام للجيب للمعادلة:  $y = a \sin bx$

حيث أن  $a > 0$  و  $b > 0$

تكون سعته  $a$  وفترته  $2\pi/b$  ولذلك فإن المنحنى  $y = 3 \sin 2x$  سعته 3 ودورته  $2\pi/2 = \pi$ . وشكل 6-4 يوضح شكل المنحنى  $y = \sin x$  و  $y = 3 \sin 2x$  على نفس المحاور.



شكل 6-4

وهناك أشكال عديدة من الحركة الموجية يمكن استنتاجها وذلك بدمج منحنيين أو أكثر من منحنيات الجيب.

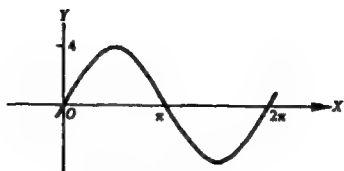
مسألة محلولة 6.1 ارسم منحنى الجيب موضعاً دورة واحدة لكل من الدوال الآتية:

**Solved Problem 6.1** Sketch the graphs of the following for one period:

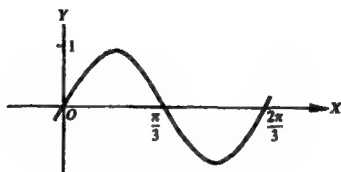
(a)  $y = 4 \sin x$ ; (b)  $y = \sin 3x$ ; (c)  $y = 3 \sin (\frac{1}{2}x)$ ;

(d)  $y = 2 \cos x = 2 \sin (x + (\frac{1}{2}\pi))$ ;

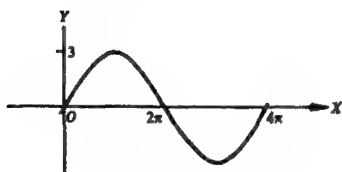
(e)  $y = 3 \cos (\frac{1}{2}x) = 3 \sin ((\frac{1}{2}x) + (\frac{1}{2}\pi))$ .



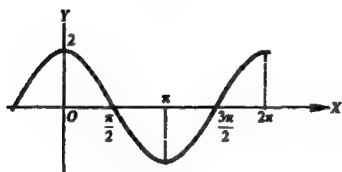
(a)  $y = 4 \sin x$



(b)  $y = \sin 3x$



(c)  $y = 3 \sin \frac{1}{2}x$



(d)  $y = 2 \cos x$

شکل 6-5

**الحل:** فى كل حالة نستخدم نفس المنحنى، ونمثل النقط لكل من الإحداثيات السينية والإحداثيات الصادية لكل منحنى على حدة لتحقيق المطلوب من السعة والفترة لكل من المنحنيات المطلوبة. انظر شكل (5-6).

$$(a) \quad y = 4 \sin x \quad \text{السعة} = 4 \quad \text{والفترة} = 2\pi$$

$$(b) \quad y = \sin 3x \quad \text{السعة} = 1 \quad \text{والفترة} = 2\pi/3$$

$$(c) \quad y = 3 \sin (1/2)x \quad \text{السعة} = 3 \quad \text{والفترة} = 2\pi/(1/2) = 4\pi$$

$$(d) \quad y = 2 \cos x \quad \text{السعة} = 2 \quad \text{والفترة} = 2\pi$$

لاحظ وضع محور الصادات:

$$(e) \quad y = 3 \cos (1/2)x \quad \text{السعة} = 3 \quad \text{والفترة} = 4\pi$$

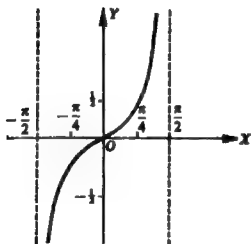
**مسألة محلولة 6.2** ارسم منحنى الجيب لكل من الدوال الآتية:

**Solved Problem 6.2** Construct the graph of each of the following:

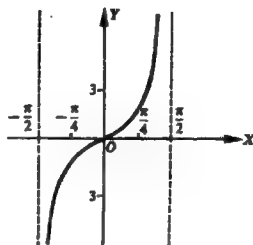
$$(a) \quad y = \frac{1}{2} \tan x; \quad (b) \quad y = 3 \tan x; \quad (c) \quad y = \tan 3x; \quad (d) \quad y = \tan (1/4)x.$$

**الحل:** فى كل حالة نستخدم نفس المنحنى ونمثل النقط لكل من الإحداثيات السينية والإحداثيات الصادية لكل منحنى على حدة، لتحقيق المطلوب من السعة والفترة لكل من المنحنيات المطلوبة. انظر شكل 6-6.

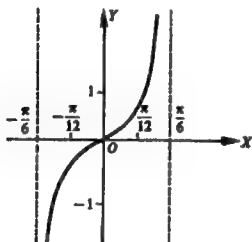
(a)  $y = \frac{1}{2} \tan x$  has period  $\pi$



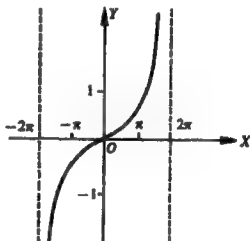
(b)  $y = 3 \tan x$  has period  $\pi$



(c)  $y = \tan 3x$  has period  $\pi/3$



(d)  $y = \tan \frac{1}{4}x$  has period  $4\pi$



شكل 6-6

مسألة محلولة 6.3 ارسم المنحنى لكل من الدوال الآتية

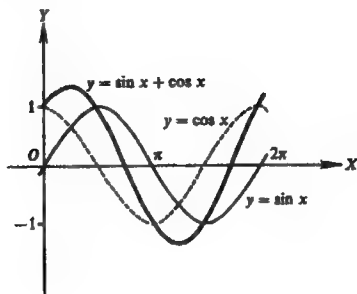
**Solved Problem 6.3** Construct the graph of each of the following:

(a)  $y = \sin x + \cos x$ ; (b)  $y = \sin 2x + \cos 3x$ ; (c)  $y = \sin 2x - \cos 3x$ ;

(d)  $y = 3 \sin 2x + 2 \cos 3x$ .

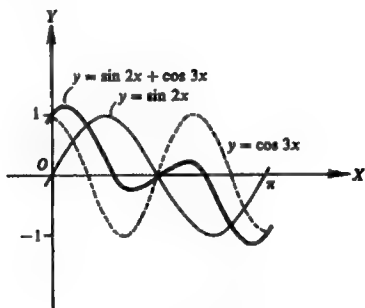


(a)  $y = \sin x + \cos x$



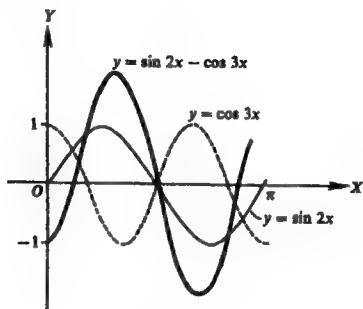
شکل 6-7(a)

(b)  $y = \sin 2x + \cos 3x$



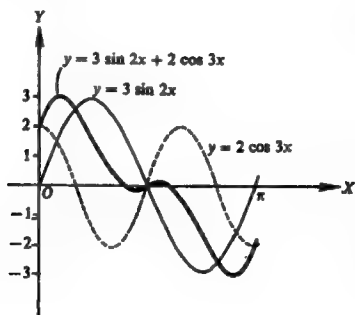
شکل 6-7(b)

(c)  $y = \sin 2x - \cos 3x$



شکل 6-7(c)

(d)  $y = 3 \sin 2x + 2 \cos 3x$



شکل 6-7(d)

# الفصل السابع

## العلاقات الأساسية والمتطابقات

### Basic Relationships And Identities

فى هذا الفصل:

✓ العلاقات الأساسية

✓ تبسيط التعبيرات المثلثية

✓ المتطابقات المثلثية

#### Basic Relationships

#### العلاقات الأساسية

مقلوب العلاقات المثلثية

ناتج قسمة العلاقات المثلثية

علاقات فيثاغورث

| Reciprocal Relationships              | Quotient Relationships                          | Pythagorean Relationships           |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ | $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ | $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ |
| $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ | $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ | $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ |
| $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ |                                                 | $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ |

والعلاقات المثلثية الأساسية صحيحة لكل قيم  $\theta$  التى تشملها الدالة. وعلى سبيل المثال  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  تتحقق لكل قيم  $\theta$  بينما

$\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$  صحيحة لكل قيم  $\theta$  حيث  $\tan \theta$  معرفة. وهذا يعنى أن كل قيم  $\theta$  حسب العلاقة  $\theta \neq n \cdot 90^\circ$  حيث  $n$  فردية. ماعدا قيمة  $\theta$  التى تجعل  $\sin \theta \neq 0$  ,  $\cos \theta = 0$ .

## تبسيط التعبيرات المثلثية

### Simplification of Trigonometric Expressions

من القواعد الشائعة تحويل أو اختصار التعبيرات التى تحوى دوال مثلثية إلى أبسط صورة.

مسألة محلولة 7.1 باستخدام العلاقة المثلثية  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  بسط التعبير المثلثى الآتى:  $\sin^3 \theta + \sin \theta \cos^2 \theta$ .

**Solved Problem 7.1** Using the relation  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , simplify the trigonometric expression  $\sin^3 \theta + \sin \theta \cos^2 \theta$ .

الحل:

$$\sin^3 \theta + \sin \theta \cos^2 \theta = \sin \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \sin \theta (1) = \sin \theta$$

### المتطابقات المثلثية Trigonometric Identities

المعادلات التى تشمل الدوال المثلثية وتحقق لكل قيم  $\theta$  فى طرفى المعادلة تسمى بالمتطابقات المثلثية. على سبيل المثال:

$$\cos \theta \csc \theta = \cot \theta \quad \text{and} \quad \cos \theta \tan \theta = \sin \theta$$

المتطابقات المثلثية تتحقق بنقل أحد طرفى المعادلة إلى الطرف الآخر (حسب الاختيار). وعموماً يتم اختيار الطرف المعقد أو الأكثر صعوبة لتبسيط عملية الحل وفى بعض الحالات يتم نقل كل من طرفى المعادلة إلى نفس الصورة.

## الخطوات العامة لتحقيق المتطابقات

### General Guidelines for Verifying Identities

1. يجب معرفة العلاقات المثلثية الأساسية الثمانية ومرادفات كل منهم.
2. يجب معرفة خطوات جمع وطرح واختصار الكسور وتحويل الكسور إلى كسور مكافئة.
3. يجب الإلمام بعمليات التحليل المختلفة وطريقة الضرب البسيطة.
4. استخدام عمليات التعويض والاختصار لأحد طرفي المعادلة في أبسط صورة.
5. اختار أحد طرفي المعادلة الأكثر تعقيداً وحاول نقله إلى الطرف الآخر من المعادلة لتكون المعادلة أكثر وضوحاً.
6. حول كل طرف من طرفي المعادلة مستقلاً بنفس الصورة.
7. تجنب عمليات التعويض في صورة المقلوب.
8. استخدم عمليات التعويض لتحويل كل الدوال المثلثية في صورة  $\sin$ ،  $\cos$  ثم اختصر.
9. أضرب كل من البسط والمقام في مرافق أحدهما.
10. بسط كسور الجذور التربيعية بالضرب في مرافق الجذر وتحويله إلى ناتج مربع تام.

مسألة محلولة 7.2 أثبت علاقات فيثاغورث للمعادلات المثلثية الآتية:

**Solved Problem 7.2** Prove the Pythagorean relationships

$$(a) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, (b) 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta,$$

$$(c) 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta.$$

الحل: من التمثيل البياني للنقطة  $P(x, y)$  فإن:  $A = (x^2 + y^2 = r^2)$

$$(x/r)^2 + (y/r)^2 = 1 \quad (a) \text{ بقسمة } A \text{ على } r^2 \text{ فإن الناتج:}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{أى أن:}$$

$$1 + (y/x)^2 = (r/x)^2 \quad (b) \text{ بقسمة } A \text{ على } x^2 \text{ فإن الناتج:}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad \text{أى أن:}$$

$$\cos^2 \theta \text{ ويقسمة طرفى المعادلة: } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ على } \cos^2 \theta$$

يكون الناتج:

$$\left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 + 1 = \left( \frac{1}{\cos \theta} \right)^2 \text{ or } \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta.$$

$$(x/y)^2 + 1 = (r/y)^2 \quad (c) \text{ بقسمة } A \text{ على } y^2 \text{ فإن الناتج:}$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta \quad \text{أى أن:}$$

$$\sin^2 \theta \text{ ويقسمة طرفى المعادلة: } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ على } \sin^2 \theta$$

يكون الناتج:

$$1 + \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 = \left( \frac{1}{\sin \theta} \right)^2 \text{ or } 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta.$$

# الفصل الثامن

## الدوال المثلثية لزاويتين

### Trigonometric Functions of Two Angles

فى هذا الفصل:

- ✓ قوانين الجمع
- ✓ قوانين الطرح
- ✓ قوانين ضعف الزاوية
- ✓ قوانين نصف الزاوية

#### Addition Formulas

#### قوانين الجمع

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

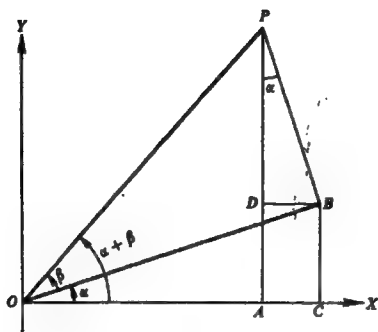
$$\tan (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

مسألة محلولة 8.1 أثبت قوانين الجمع للعلاقات المثلثية.

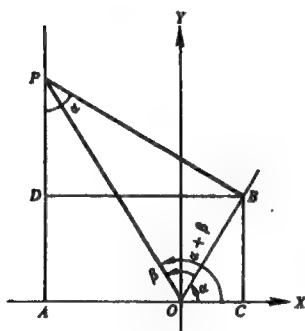
**Solved Problem 8.1** Prove the addition formulas.

الحل: نفرض أن زاوية  $\alpha$  وزاوية  $\beta$  هى زوايا حادة موجبة حيث

$\alpha + \beta < 90^\circ$  شكل 8-1(a) أو  $\alpha + \beta > 90^\circ$  شكل 8-1(b).



(a)



(b)

شكل 8-1

ولرسم هذه الأشكال نمثل زاوية  $\alpha$  في الوضع القياسي ونمثل زاوية  $\beta$  التي تشترك مع زاوية  $\alpha$  في الرأس  $O$  والضلع الأساسي للزاوية هو نفس الضلع الخارجى للزاوية  $\alpha$ . ونفرض نقطة  $P$  على الضلع الخارجى لزاوية



$(\alpha + \beta)$ . نرسم  $PA$  عمودى على المحور  $OX$ ، ونرسم  $PB$  عمودى على الضلع الخارجى لزاوية  $\alpha$ ، المستقيم  $BC$  عمودى على المحور  $OX$  والمستقيم  $BD$  عمودى على المستقيم  $AP$ .

إذن:  $\angle APB = \alpha$  لأن الأضلاع المتناظرة ( $OA$  و  $AP$  ، و  $OB$  و  $BP$ ) هي أضلاع متعامدة: إذن

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$\begin{aligned} \frac{AP}{OP} &= \frac{AD + DP}{OP} = \frac{CB + DP}{OP} = \frac{CB}{OP} + \frac{DP}{OP} = \frac{CB}{OB} \cdot \frac{OB}{OP} + \frac{DP}{BP} \cdot \frac{BP}{OP} \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) =$$

$$\begin{aligned} \frac{OA}{OP} &= \frac{OC - AC}{OP} = \frac{OC - DB}{OP} = \frac{OC}{OP} - \frac{DB}{OP} = \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OB}{OP} - \frac{DB}{BP} \cdot \frac{BP}{OP} \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\tan(\alpha + \beta) =$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

## Subtraction Formulas

## قوانين الطرح

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

مسألة محلولة 8.2 أثبت قوانين الطرح للعلاقات المثلثية.

**Solved Problem 8.2** Prove the subtraction formulas.

الحل:

$$\begin{aligned}\sin (\alpha - \beta) &= \sin [\alpha + (-\beta)] = \sin \alpha \cos (-\beta) + \cos \alpha \sin (-\beta) \\ &= \sin \alpha (\cos \beta) + \cos \alpha (-\sin \beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos (\alpha - \beta) &= \cos [\alpha + (-\beta)] = \cos \alpha \cos (-\beta) - \sin \alpha \sin (-\beta) \\ &= \cos \alpha (\cos \beta) - \sin \alpha (-\sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan (\alpha - \beta) &= \tan [\alpha + (-\beta)] = \frac{\tan \alpha + \tan (-\beta)}{1 - \tan \alpha \tan (-\beta)} \\ &= \frac{\tan \alpha + (-\tan \beta)}{1 - \tan \alpha (-\tan \beta)} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

## Double-Angle Formulas

## قوانين ضعف الزاوية

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

مسألة محلولة 8.3 أثبت صحة قوانين ضعف الزاوية.

**Solved Problem 8.3** Prove the double-angle formulas.

الحل: من قوانين الجمع للعلاقات المثلثية الآتية:

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

نستبدل زاوية  $\beta$  بزاوية  $\alpha$  ليكون ناتج التبديل العلاقات الآتية لضعف الزاوية:

$$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

## Half-Angle Formulas

## قوانين نصف الزاوية

$$\sin \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

مسألة محلولة 8.4 أثبت صحة قوانين نصف الزاوية.

**Solved Problem 8.4** Prove the half-angle formulas.

الحل:

في العلاقة:  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$  استبدل زاوية  $\alpha$  بالزاوية  $(\frac{1}{2}\theta)$

لاستنتاج العلاقات الآتية:

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta$$

$$\sin^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\sin \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

في العلاقة:  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$  استبدل زاوية  $\alpha$  بالزاوية  $(\frac{1}{2}\theta)$

لاستنتاج العلاقات الآتية:

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta - 1$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\cos \frac{1}{4}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

وأخيراً:

$$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta)}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^2}} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}} = \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

الإشارة  $\pm$  ليست ذات أهمية فى هذه الحالة لأن إشارة  $\tan \frac{1}{4}\theta$  هى نفس إشارة  $\sin \theta$  وإشارة  $(1 - \cos \theta)$  هى دائماً موجبة.



## الفصل التاسع

### قوانين الجمع والطرح والضرب للزوايا

### Sum, Difference, And Product Formulas

في هذا الفصل:

✓ ضرب العلاقات المثلثية للجيب وجيب التمام

✓ المجموع والفرق للجيب وجيب التمام

ضرب العلاقات المثلثية للجيب وجيب التمام

#### Products of Sines and Cosines

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

مسألة محلولة 9.1 استنتج قوانين الضرب للعلاقات المثلثية.

**Solved Problem 9.1** Derive the product formulas.

الحل:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \beta$$

ومن المعادلة الأساسية نستنتج أن:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

بما أن:

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

إذن:

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

بما أن:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= 2 \cos \alpha \cos \beta$$

ومن المعادلة الأساسية نستنتج أن:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

بما أن:

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

إذن:

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$



## المجموع والفرق للجيب وجيب التمام

### Sum and Difference of Sines and Cosines

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

مسألة محلولة 9.2 استنتج قوانين الجمع والفرق للجيب وجيب التمام.

**Solved Problem 9.2** Derive the sum and difference formulas.

$$\alpha - \beta = B \quad \text{و} \quad \alpha + \beta = A \quad \text{الحل: نفرض أن:}$$

$$\beta = 1/2(A - B) \quad \text{و} \quad \alpha = 1/2(A + B) \quad \text{من الفرض نستنتج أن:}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \quad \text{بالتعويض في المعادلة:}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B) \quad \text{نستنتج أن:}$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta \quad \text{بالتعويض في المعادلة:}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B) \quad \text{نستنتج أن:}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad \text{بالتعويض في المعادلة:}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B) \quad \text{نستنتج أن:}$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta \quad \text{بالتعويض في المعادلة:}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B) \quad \text{نستنتج أن:}$$



## الفصل العاشر

### المثلثات المائلة

### Oblique Triangles

فى هذا الفصل:

✓ المثلثات المائلة

✓ قانون الجيب

✓ قانون جيب التمام

✓ حل المثلثات المائلة

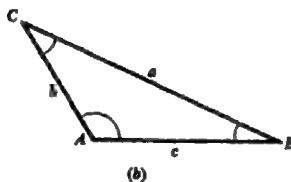
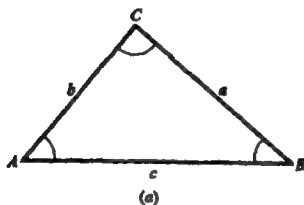
### Oblique Triangles

### المثلثات المائلة



المثلث المائل oblique triangle هو مثلث لا يشمل ضمن زواياه الزاوية القائمة. وهو مثلث زواياه الثلاثة حادة أو زاويتان حادتان والزاوية الثالثة منفرجة.

وفى المثلث نرمز للزوايا بالحرف  $A$ ،  $B$ ،  $C$  والأضلاع بالحروف  $a$ ،  $b$ ،  $c$ . انظر شكل 10-1.



شكل 10-1

## Law of Sines

## قانون الجيب

فى أى مثلث  $ABC$  تتناسب الأضلاع مع جيوب الزوايا التى تقابل هذه الأضلاع فى المثلث.

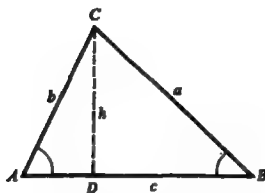
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{or} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

مسألة محلولة 10.1 استنتج قانون الجيب لحل المثلث.

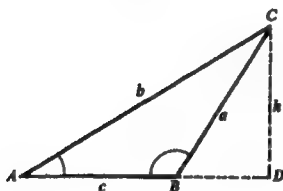
**Solved Problem 10.1** Derive the law of sines.

الحل:

نفرض أن  $ABC$  أى مثلث مائل. فى شكل 10-2 الزاوية  $A$  والزاوية  $B$  هما زوايا حادة بينما فى شكل 10-3 زاوية  $B$  هى زاوية منفرجة.



شكل 10-2



شكل 10-3

نرسم  $CD$  عمودى على  $AB$  أو امتداد  $AB$  كما فى شكل 10-3 ونفرض أن طول العمود هو  $h$ . فى المثلث القائم الزاوية  $ACD$  فى كل من الشكلين  $h = b \sin A$  بينما فى المثلث القائم الزاوية  $BCD$  طول العمود  $h = a \sin B$ . إذن فى شكل 10-3 طول العمود  $h$  هو:

$$h = a \sin \angle DBC = a \sin (180^\circ - B) = a \sin B$$

ومن طول العمود نستنتج أن

$$a \sin B = b \sin A \quad \text{or} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

وينفس الطريقة السابقة (يرسم عمود من نقطة  $B$  على  $AC$  أو عمود من نقطة  $A$  على  $BC$ ) نستنتج أن:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

or

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ومن المعادلات السابقة نستنتج أن:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

## Law of Cosines

## قانون جيب التمام

فى أى مثلث  $ABC$  مربع أى ضلع فى المثلث يساوى مجموع مربعى الضلعين الآخرين مطروحاً منه ضعف المستطيل المكون من أحد هذين الضلعين ومسقط الآخر عليه.

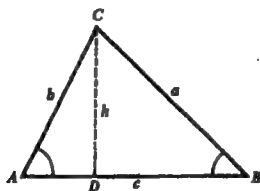
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

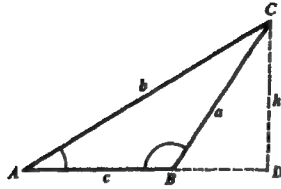
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

مسألة محلولة 10.2 استنتج قوانين جيب التمام لحل المثلث.

**Solved Problem 10.2** Derive the law of cosines.



شكل 10-4



شكل 10-5

الحل:

من المثلث القائم الزاوية  $ACD$  في كل من شكلى 10-4، 10-5 نستنتج أن:  
 $b^2 = h^2 + (AD)^2$

من المثلث القائم الزاوية  $BCD$  في شكل 10-4 نستنتج أن:

$$h = a \sin B \text{ and } BD = a \cos B$$

ولهذا فإن

$$AD = AB - DB = c - a \cos B$$

بالتعويض فى المعادلة:

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + (AD)^2 = a^2 \sin^2 B + c^2 - 2ca \cos B + a^2 \cos^2 B \\ &= a^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) + c^2 - 2ca \cos B \\ &= a^2 + c^2 - 2ca \cos B \end{aligned}$$

من المثلث القائم الزاوية  $BCD$  لشكل 10-5. نستنتج أن:

$$h = a \sin \angle CBD = a \sin (180^\circ - B) = a \sin B.$$

$$BD = a \cos \angle CBD = a \cos (180^\circ - B) = -a \cos B.$$

$$AD = AB + BD = c - a \cos B$$

إذن:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

والصور الأخرى لقوانين جيب التمام يمكن استنتاجها بالتغيير الدوري للحروف. على سبيل المثال:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .

## حل المثلثات المائلة Solution of Oblique Triangles

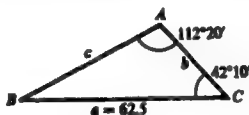
بمعلومية ثلاثة أجزاء من مثلث وليست كل زوايا المثلث معلومة، يمكن حل المثلث أى يمكن إيجاد أطوال الأضلاع الثلاثة وزوايا المثلث.

والحالات الخمس لحل المثلثات المائلة هي:

حالة I: بمعلومية زاويتين والضلع المقابل لأحد الزاويتين، يمكن إيجاد الضلع المقابل للزاوية الأخرى باستخدام قانون الجيب لحل المثلث.

مسألة محلولة 10.3 حل المثلث  $ABC$  إذا كان:  $a = 62.5$ ،  $A = 112^\circ 20'$ ،  $C = 42^\circ 10'$ . انظر شكل 10-6.

**Solved Problem 10.3** Solve the triangle  $ABC$ , given  $a = 62.5$ ,  $A = 112^\circ 20'$ , and  $C = 42^\circ 10'$ . See Figure 10-6.



شكل 10-6

الحل: لإيجاد زاوية  $B$ :

$$B = 180^\circ - (C + A) = 180^\circ - 154^\circ 30' = 25^\circ 30'$$

لإيجاد طول الضلع  $b$ :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{62.5 \sin 25^\circ 30'}{\sin 112^\circ 20'} = \frac{62.5(0.4305)}{0.9250} = 29.1$$



$$[\sin 112^{\circ}20' = \sin(180^{\circ} - 112^{\circ}20') = \sin 67^{\circ}40']$$

لإيجاد طول الضلع  $c$ :

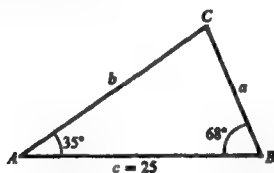
$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{62.5 \sin 42^{\circ}10'}{\sin 112^{\circ}20'} = \frac{62.5(0.6713)}{0.9250} = 45.4$$

الأجزاء المطلوبة هي:  $B = 25^{\circ}30'$ ،  $c = 45.4$ ،  $b = 29.1$ .

حالة II: بمعلومية زاويتين على جانبي ضلع معلوم من المثلث، يمكن إيجاد الزاوية الثالثة واستخدام قانون الجيب لإيجاد الأضلاع الأخرى.

مسألة محلولة 10.4 حل المثلث  $ABC$  إذا كان:  $c = 25$ ،  $A = 35^{\circ}$ ،  $B = 68^{\circ}$ . انظر شكل 10-7.

**Solved Problem 10.4** Solve the triangle  $ABC$ , given  $c = 25$ ,  $A = 35^{\circ}$ , and  $B = 68^{\circ}$ . See Figure 10-7.



شكل 10-7

الحل:

لإيجاد زاوية  $C$ :

$$C = 180^{\circ} - (A + B) = 180^{\circ} - 103^{\circ} = 77^{\circ}$$

لإيجاد طول الضلع  $a$ :

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{25 \sin 35^{\circ}}{\sin 77^{\circ}} = \frac{25(0.5736)}{0.9744} = 15$$

لإيجاد طول الضلع  $b$ :

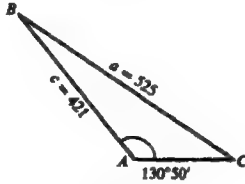
$$\text{For } b: \quad b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{25 \sin 68^\circ}{\sin 77^\circ} = \frac{25(0.9272)}{0.9744} = 24$$

الأجزاء المطلوبة هي:  $a = 15$ ,  $b = 24$  و  $B = 77^\circ$ .

حالة III: بمعلومية ضلعين من المثلث والزاوية المقابلة لأحدهما وباستخدام قانون الجيب، يمكن إيجاد الزاوية المقابلة للضلع الآخر.

مسألة محلولة 10.5 حل المثلث  $ABC$  إذا كان:  $a = 525$ ,  $c = 421$ , و  $A = 130^\circ 50'$ . انظر شكل 10-8.

**Solved Problem 10.5** Solve the triangle  $ABC$ , given  $a = 525$ ,  $c = 421$ , and  $A = 130^\circ 50'$ . See Figure 10-8.



شكل 10-8

الحل: حيث أن  $A$  هي زاوية منفرجة و  $a > c$  إذن يوجد حل واحد للمثلث. لإيجاد زاوية  $C$ :

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{421 \sin 130^\circ 50'}{525} = \frac{421(0.7566)}{525} = 0.6067 \text{ and } C = 37^\circ 20'$$

لإيجاد زاوية  $B$ :

$$B = 180^\circ - (C + A) = 11^\circ 50'$$

لإيجاد طول الضلع  $b$ :

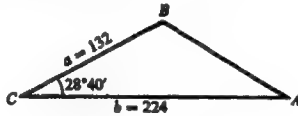
$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{525 \sin 11^\circ 50'}{\sin 130^\circ 50'} = \frac{525(0.2051)}{0.7566} = 142$$

الأجزاء المطلوبة هي:  $C = 37^\circ 20'$ ،  $B = 11^\circ 50'$  و  $b = 142$ .

حالة IV: بمعلومية ضلعين والزاوية المحصورة بينهما وباستخدام قانون جيب التمام، يمكن إيجاد طول الضلع الثالث.

مسألة محلولة 10.6 حل المثلث  $ABC$  إذا كان:  $a = 132$  و  $b = 224$  و  $C = 28^\circ 40'$ . انظر شكل 10-9.

**Solved Problem 10.6** Solve the triangle  $ABC$ , given  $a = 132$ ,  $b = 224$ , and  $C = 28^\circ 40'$ . See Figure 10-9.



شكل 10-9

الحل:

لإيجاد طول الضلع  $c$ :

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= (132)^2 + (224)^2 - 2(132)(224) \cos 28^\circ 40' \\ &= (132)^2 + (224)^2 - 2(132)(224) (0.8774) \\ &= 15,714 \\ c &= 125 \end{aligned}$$

لإيجاد زاوية A:

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{132 \sin 28^\circ 40'}{125} = \frac{132(0.4797)}{125} = 0.5066 \text{ and } A = 30^\circ 30'$$

لإيجاد زاوية B:

$$\sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{224 \sin 28^\circ 40'}{125} = \frac{224(0.4797)}{125} = 0.8596 \text{ and } B = 120^\circ 40'$$

ملحوظة: (حيث أن:  $b > a$  و  $A$  زاوية حادة)

(حيث أن  $A + C < 90^\circ$  و  $B > 90^\circ$ ).

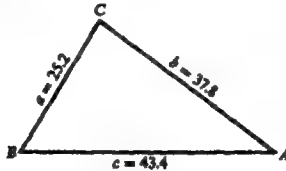
تأكد من الناتج:  $A + B + C = 179^\circ 50'$

الأجزاء المطلوبة هي:  $A = 30^\circ 30'$ ،  $B = 120^\circ 40'$  و  $c = 125$ .

حالة V: بمعلومية الأضلاع الثلاثة وباستخدام قانون جيب التمام، يمكن إيجاد أى زاوية وبالتالي الزوايا الثلاثة.

مسألة محلولة 10.7 حل المثلث ABC إذا كان:  $a = 25.2$ ،  $b = 37.8$ ،  $c = 43.4$ . انظر شكل 10-10.

**Solved Problem 10.7** Solve the triangle ABC, given  $a = 25.2$ ,  $b = 37.8$ , and  $c = 43.4$ . See Figure 10-10.



شكل 10-10

الحل:

لإيجاد زاوية A:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(37.8)^2 + (43.4)^2 - (25.2)^2}{2(37.8)(43.4)} = 0.8160$$

$$\text{and } A = 35^\circ 20'$$

لإيجاد زاوية B:

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(43.4)^2 + (25.2)^2 - (37.8)^2}{2(43.4)(25.2)} = 0.4982$$

$$\text{and } B = 60^\circ 10'$$

لإيجاد زاوية C:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(25.2)^2 + (37.8)^2 - (43.4)^2}{2(25.2)(37.8)} = 0.0947$$

$$\text{and } C = 84^\circ 30'$$

تأكد من الناتج:  $A + B + C = 180^\circ$ .



## الفصل الحادى عشر

### مساحة المثلث

### Area of a Triangle

فى هذا الفصل:

✓ مساحة المثلث

✓ قوانين المساحة

#### Area of a Triangle

#### مساحة المثلث

المساحة  $K$  لآى مثلث تساوى نصف حاصل ضرب القاعدة فى الارتفاع. وعموماً يمكن إيجاد مساحة المثلث بمعلومية الأضلاع والزوايا للمثلث.

#### Area Formulas

#### قوانين المساحة

الحالتان I و II المعطى زاويتان وضلع فى المثلث  $ABC$

Cases I and II. Given two angles and a side of triangle  $ABC$

يمكن إيجاد الزاوية الثالثة باستخدام العلاقة:  $A + B + C = 180^\circ$  ومساحة المثلث تساوى مربع ضلع من أضلاع المثلث فى حاصل ضرب جيوب زوايا وجانبى الضلع مقسوماً على ضعف جيب الزاوية المقابلة لهذا الضلع. أى أن:

$$K = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

### الحالة III. المعطى ضلعان من أضلاع المثلث وزاوية مقابلة لأحد الضلعين في المثلث $ABC$

Case III. Given two sides and the angle opposite one of them in triangle  $ABC$

يمكن إيجاد الزاوية الثانية للمثلث باستخدام قانون الجيب وتطبيق الحالة "T" لإيجاد مساحة المثلث بمعلومية ضلع وزاويتين من المثلث وفي جهة واحدة من الضلع المعلوم، ولذلك يوجد أحياناً حلان لإيجاد مساحة المثلث بمعلومية الزاوية الثانية وضلعين من أضلاع المثلث. ولذلك يجب استخدام أكثر من طريقة عند إيجاد مساحة مثلثين أو أكثر.

### الحالة IV. المعطى ضلعان من أضلاع المثلث وزاوية محصورة بين الضلعين في المثلث $ABC$

Case IV. Given two sides and the included angle of triangle  $ABC$

مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما. أى أن:

$$K = (\frac{1}{2})ab \sin C = (\frac{1}{2})ac \sin B = (\frac{1}{2})bc \sin A$$

### الحالة V. المعطى ثلاثة أضلاع في المثلث $ABC$

Case V. Given the three sides of triangle  $ABC$

مساحة المثلث تساوى الجذر التربيعى لنصف المحيط مضروباً في نصف المحيط مطروحاً من الأضلاع الثلاثة كل على حدة.

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

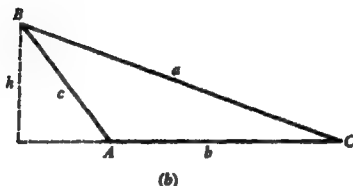
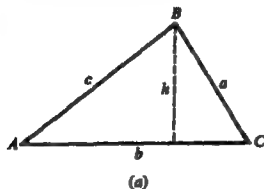
$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

حيث أن:



مسألة محلولة 11.1 استنتج العلاقة:  $K = (\frac{1}{2})bc \sin A$ . انظر شكل 11-1.

**Solved Problem 11.1** Derive the formula  $K = (\frac{1}{2})bc \sin A$ . See Figure 11-1.



شكل 11-1

الحل: نفرض أن الارتفاع هو  $h$  في كل من الشكلين حيث أن:  $h = c \sin A$   
ومن ذلك نستنتج أن:

$$K = (\frac{1}{2})bh = (\frac{1}{2})bc \sin A$$

مسألة محلولة 11.2 استنتج العلاقة الآتية:

**Solved Problem 11.2** Derive the formula

$$K = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

الحل: من المسألة المحلولة 11-1.  $K = (\frac{1}{2})bc \sin A$

ويستخدم قانون الجيب:

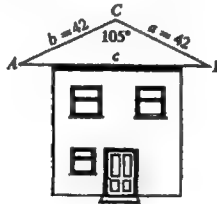
$$b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

ومن العلاقات السابقة نستنتج أن:

$$K = (\frac{1}{2})bc \sin A = (\frac{1}{2}) \frac{c \sin B}{\sin C} c \sin A = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

**مسألة محلولة 11.3** يحتاج دهان حساب مساحة سقف منزل جملوني الشكل إذا كان الشكل عبارة عن مثلث طول كل من ضلعيه المتساويين 42 قدم وزاوية الرأس لتقابل الضلعين هي  $105^\circ$ .

**Solved Problem 11.3** A painter needs to find the area of the gable end of a house. What is the area of the gable if it is a triangle with two sides of 42.0 ft that meet at a  $105^\circ$  angle?



شكل 11-2

**الحل:** من شكل 11-2 نستنتج أن:  $a = 42.0$  ft و  $b = 42.0$  ft و  $C = 105^\circ$ .

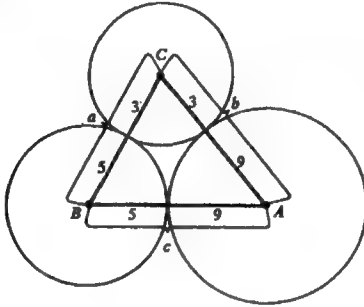
$$K = (\frac{1}{2})ab \sin C$$

$$= (\frac{1}{2})(42)(42) \sin 105^\circ$$

$$= 852 \text{ ft}^2$$

مسألة محلولة 11.4 ثلاث دوائر متماسة من الخارج وأنصاف أقطارهم هي 3.0 cm و 5.0 cm و 9.0 cm على الترتيب. احسب مساحة المثلث المكون من توصيل المراكز للدوائر الثلاث.

**Solved Problem 11.4** Three circles with radii 3.0, 5.0, and 9.0 cm are externally tangent. What is the area of the triangle formed by joining their centers?



شكل 11-3

الحل: في شكل 11-3 نستنتج أن:  $a = 8 \text{ cm}$  و  $b = 12 \text{ cm}$  و  $c = 14 \text{ cm}$ .  
حيث أن:

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = 17 \text{ cm}$$

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{17(17-8)(17-12)(17-14)}$$

$$= \sqrt{2295}$$

$$= 48 \text{ cm}^2$$



## الفصل الثانى عشر

### الدوال المثلثية العكسية

### Inverses of Trigonometric Functions

فى هذا الفصل:

✓ علاقات الدوال المثلثية العكسية

✓ منحنيات العلاقات المثلثية العكسية

✓ الدوال المثلثية العكسية

✓ مدى القيمة الأساسية

✓ القيم العامة للعلاقات المثلثية العكسية

### علاقات الدوال المثلثية العكسية

### Inverse Trigonometric Relations

المعادلة:

$$x = \sin y$$

تعرف قيمة وحيدة لـ  $x$  لكل زاوية من زوايا  $y$  المعطاة فى المعادلة. ولكن عندما تكون  $x$  معلومة يحتمل أن لا يكون هناك حل للمعادلة أو توجد عدة حلول. وعلى سبيل المثال لا يكون هناك حل للمعادلة عندما  $x=2$ . حيث أن جيب أى زاوية معلومة لا يزيد عن الواحد الصحيح.

وعندما  $x = 1/4$  يوجد عدة حلول للمعادلة.

وهي:  $y = 30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ, -210^\circ, -330^\circ, \dots$

$$y = \arcsin x$$

وبالرغم من استخدام كلمة  $\arcsin$  في العلاقة السابقة فإنه يمكن تعريف  $y$  بالزاوية التي جيبها مساوياً  $x$  وبطريقة مشابهة يمكن كتابة العلاقة:  $y = \arccos x$  حيث أن  $x = \cos y$  و  $y = \arctan x$  حيث أن  $x = \tan y$  وهكذا.

والعلاقات الرمزية  $y = \sin^{-1} x$  و  $y = \cos^{-1} x$  يمكن قراءتها على أساس معكوس الجيب للزاوية  $x$ . ومعكوس جيب التمام للزاوية  $x$  يمكن استخدامه أيضاً عند كتابة العلاقات المثلثية العكسية. ولكن يمكن أن يحدث خلط بين العلاقة  $\sin^{-1} x$  والعلاقة  $(\sin x)^{-1}$ . ولذلك يجب العناية عند كتابة الأس السالب للدوال المثلثية عند الحاجة إلى ذلك.

## منحنيات العلاقات المثلثية العكسية

### Graphs of the Inverse Trigonometric Relations

منحنى العلاقة:  $y = \arcsin x$  هو نفس المنحنى للعلاقة  $x = \sin y$  ويختلف عن منحنى العلاقة  $y = \sin x$  حيث أن  $x$  و  $y$  تم تبديلها. ولذلك فإن المنحنى  $y = \arcsin x$  هو عبارة عن منحنى الجيب مرسوم على المحور الصادي بدلاً من المحور السيني.

وبالمثل فإن منحنيات الدوال المثلثية العكسية الأخرى هي نفس منحنيات الدوال المثلثية مع اختلاف أدوار  $x$  و  $y$ .

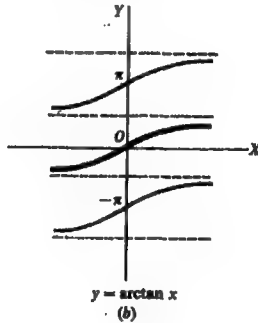
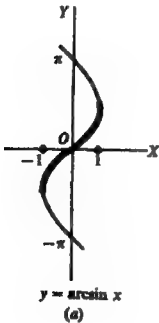
## الدوال المثلثية العكسية

### Inverse Trigonometric Functions

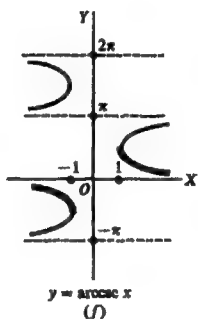
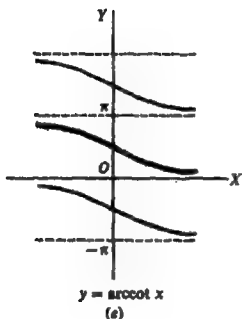
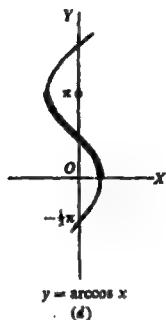
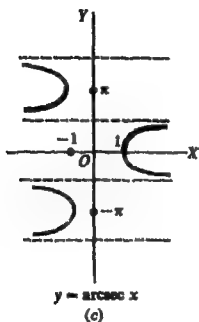


إنه من الضروري اعتبار أن العلاقات المثلثية العكسية دوال. (وهذا يعنى أن أى قيمة من  $y$  تناظرها قيمة وحيدة من  $x$ ) ولعمل ذلك سوف نختار واحدة من الزوايا تناظرها القيمة المعطاة من  $x$ . على سبيل المثال عند  $x = 1/2$  سوف تختار قيمة  $y = \pi/6$  وعندما  $x = -1/2$  سوف نختار قيمة

$y = -\pi/6$ . وهذه القيم المختارة الأساسية سوف تحكم العلاقة  $\arcsin x$  و  $\arccos x$ ، إلخ. والرموز المرادفة لعلاقات الدوال المثلثية العكسية هي.  $\tan^{-1} x$ ،  $\cos^{-1} x$ ،  $\sin^{-1} x$  وأجزاء المنحنى حيث القيم الأساسية لكل من العلاقات المثلثية العكسية موضحة فى شكل 12-1 (a) إلى (f) بخط واضح وسميك. عندما تكون  $x$  موجبة أو مساوية للصفر فى وجود الدالة العكسية فإن القيمة الأساسية هي قيمة  $y$  الواقعة بين 0 و  $\pi/2$  كاملة.



شكل 12-1



تابع شكل 12-1

## مدى القيمة الأساسية Principal-Value Range

اختلف المؤلفون في تعريف القيمة الأساسية للدوال العكسية عندما تكون قيمة  $x$  سالبة. والتعاريف المعطاة هي الأنسب لعلم التفاضل. ففى معظم الكتب لعلوم التفاضل تعرف الدوال المثلثية العكسية على أساس أنها



القيمة الأساسية العكسية ولا تستخدم الحروف الكبيرة (Capital Letter) في رموز العلاقات العكسية. وعموماً لا تسبب الدوال العكسية أى مشاكل عند دراسة علم التفاضل.

## القيم العامة للعلاقات المثلثية العكسية

### General Values of Inverse Trigonometric Relations

نفرض أن  $y$  هي دالة مثلثية عكسية لها علاقة مع  $x$  وحيث أن قيمة العلاقة المثلثية العكسية  $y$  معلومة فإن هناك وضعين يمكن تحديدهما بالنسبة للضلع الخارجى للزاوية  $y$ . نفرض أن  $y_1$  و  $y_2$  هما على الترتيب الزوايا المحددة بوضعى الضلع الخارجى ولذلك فإن القيمة الكلية للزاوية  $y$  المكونة من الزاويتين  $y_1$  و  $y_2$  مع كل الزوايا المطابقة لهما هي:

$$y_1 + 2n\pi \quad \text{and} \quad y_2 + 2n\pi$$

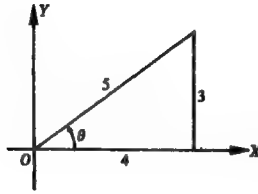
حيث أن  $n$  هي أى عدد صحيح موجب أو سالب أو يساوى الصفر. وإحدى قيم  $y_1$  و  $y_2$  يمكن اتخاذها دائماً القيمة الأساسية للدالة المثلثية العكسية.

**مسألة محلولة 12.1** أوجد قيمة كل من الدوال الآتية:

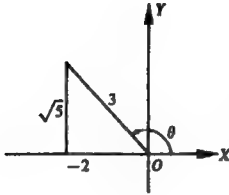
**Solved Problem 12.1** Evaluate each of the following:

(a)  $\cos(\arcsin 3/5)$ , (b)  $\sin[\arccos(-2/3)]$ , and (c)  $\tan[\arcsin(-3/4)]$

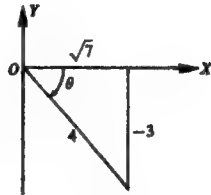
الحل:



(a)



(b)



(c)

شكل 12-2

(a) نفرض أن:  $\theta = \arcsin 3/5$  ، إذن  $\sin \theta = 3/5$  من الشكل (a) 12-1. الوضع القياسى لزاوية  $\theta$  فى الربع الأول.

$$\cos (\arcsin 3/5) = \cos \theta = 4/5$$

(b) نفرض أن:  $\theta = \arccos (-2/3)$  ، إذن  $\cos \theta = -2/3$  من الشكل (b) 12-1. الوضع القياسى لزاوية  $\theta$  فى الربع الثانى.

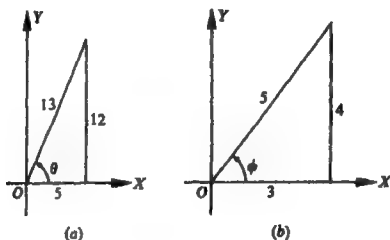
$$\sin [\arccos (-2/3)] = \sin \theta = \sqrt{5} / 3$$

(c) نفرض أن:  $\theta = \arcsin (-3/4)$  ، إذن  $\sin \theta = -3/4$  من الشكل (c) 12-1. الوضع القياسى لزاوية  $\theta$  فى الربع الرابع.

$$\tan [\arcsin (-3/4)] = \tan \theta = -3 / \sqrt{7} = -3\sqrt{7} / 7$$

**Solved Problem 12.2 Evaluate** مسألة محلولة 12.2 أوجد قيمة ما يأتي

$$\sin (\arcsin 12/13 + \arcsin 4/5)$$



شكل 12-3

الحل: نفرض أن:

$$\theta = \arcsin 12/13$$

$$\phi = \arcsin 4/5$$

ومن الشكل (b) و (a) نستنتج أن زاوية  $\theta$  و  $\phi$  تقعان في الربع الأول.

$$\sin (\arcsin 12/13 + \arcsin 4/5) = \sin (\theta + \phi)$$

$$= \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \text{ (قانون المجموع)}$$

$$= \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{56}{65}$$



# الفصل الثالث عشر

## المعادلات المثلثية

### Trigonometric Equations

فى هذا الفصل:

✓ المعادلات المثلثية

✓ حل المعادلات المثلثية

Trigonometric Equations

المعادلات المثلثية

المعادلات المثلثية هى المعادلات التى تشمل دوال النسب المثلثية لزوايا غير معلومة وهى تنقسم إلى:

(a) معادلات متطابقة أو متطابقات وتحققها كل الزوايا غير المعلومة المعرفة بالدالة.

(b) معادلات شرطية وتحققها بعض قيم الزوايا الخاصة غير المعلومة.



وفى هذا الفصل سوف نستخدم مصطلح معادلة equation بدلاً من المعادلة الشرطية conditional equation.

ولحل المعادلة المثلثية  $\sin x = 0$  لإيجاد قيمة

الزاوية  $x$  التى تحقق المعادلة يوجد حلان للمعادلة  $\sin x = 0$  وهما:  $x = 0$  و  $x = \pi$ .

إذا كان هناك حل للمعادلة المثلثية المعطاة فإنه عموماً يوجد عدد

غير محدود من الحلول للمعادلة ولذلك فإن الحل الكامل للمعادلة:  $\sin x = 0$  معطى بالعلاقة الآتية:

$$x = 0 + 2n\pi \quad x = \pi + 2n\pi$$

حيث أن  $n$ : هي أى عدد موجب أو سالب أو يساوى الصفر.

## حل المعادلات المثلثية Solving Trigonometric Equations

لا توجد طريقة عامة لحل المعادلات المثلثية، لكن توجد عدة خطوات قياسية موضحة فى الأمثلة الآتية وخطوات أخرى موضحة بالمسائل المحلولة الآتية. وكل الحلول سوف تكون فى الفترة  $0 \leq x < 2\pi$ .

### (A) إمكانية تحليل المعادلات المثلثية

(A) The equation may be factorable

مسألة محلولة 13.1 حل المعادلة المثلثية الآتية:

Solved Example 13.1: Solve:

$$\sin x - (2 \sin x \cos x) = 0$$

الحل: حلل المعادلة:  $\sin x - 2 \sin x \cos x = 0$

ليكون ناتج التحقيق به  $\sin x (1 - 2 \cos x) = 0$

بمساواة كل عامل من عوامل المعادلة بالصفر يكون الناتج:

$$\sin x = 0 \quad \text{and} \quad x = 0, \pi$$

$$\text{or } 1 - 2 \cos x = 0 \quad \text{and} \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad x = \pi/3, 5\pi/3$$

وبالتعويض عن قيم  $x$  فى المعادلة الأصلية:  $\sin x - 2 \sin x \cdot \cos x$

$$\sin x - 2 \sin x \cos x = 0 - 2(0)(1) = 0 \quad \text{عند } x = 0$$

$$\sin x - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2(\frac{1}{2}\sqrt{3})(\frac{1}{2}) = 0 \quad \text{عند } x = \pi/3$$

$$\sin x - 2 \sin x \cos x = 0 - 2(0)(-1) = 0 \quad \text{عند } x = \pi$$

$$\sin x - 2 \sin x \cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2(-\frac{1}{2}\sqrt{3})(\frac{1}{2}) = 0 \quad \text{عند } x = 5\pi/3$$

إذن الحل المطلوب في الفترة  $(0 \leq x < 2\pi)$  هو:  $x = 0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$ .

(B) التعبير عن الدوال المتنوعة بالمعادلة بدالة فردية بسيطة

(B) The various functions occurring in the equation may be expressed in terms of a single function

مسألة محلولة 13.2 حل المعادلة المثلثية الآتية:

Solved Example 13.2: Solve:

$$\sec x + \tan x = 0$$

الحل: بضرب طرفي المعادلة:

$$\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

في  $\cos x$  ليكون ناتج الضرب:

$$1 + \sin x = 0 \quad \text{or} \quad \sin x = -1$$

ويحل المعادلة يكون الناتج  $x = 3\pi/2$ . وليست الدوال  $\sec x$  و  $\tan x$  معرفة عندما  $x = 3\pi/2$  ولذلك فإن المعادلة ليس لها حل.

(C) تربيع طرفي المعادلة

(C) Both members of the equation are squared

مسألة محلولة 13.3 حل المعادلة المثلثية الآتية:

Solved Example 13.3: Solve:

$$\sin x + \cos x = 1$$

الحل: إذا اتبعنا الخطوات المستخدمة في الطريقة (B) سوف تستبدل  $\sin x$  بالمقدار  $\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$  أو  $\cos x$  بالمقدار  $\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$  وبالتالي سوف تظهر مشكلة الجذر في المعادلة. ولتجنب ذلك نكتب المعادلة على الصورة الآتية:

$$\sin x = 1 - \cos x$$

وبتربيع طرفي المعادلة يكون الناتج:

$$\sin^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 2 \cos x = 2 \cos x (\cos x - 1) = 0$$

من المعادلة.  $\cos x = 0$ ،  $x = \pi/2$ ،  $x = 3\pi/2$ .

ومن المعادلة.  $\cos x = 1$ ،  $x = 0$

وبالتعويض عن قيم  $x$  في المعادلة الأصلية:

$$\sin x + \cos x = 0 + 1 = 1 \quad \text{عند } x = 0$$

$$\sin x + \cos x = 1 + 0 = 1 \quad \text{عند } x = \pi/2$$

$$\sin x + \cos x = -1 + 0 \neq 1 \quad \text{عند } x = 3\pi/2$$

ولذلك فإن حل المعادلة هو:  $x = 0$  و  $x = \pi/2$ .

وقيمة  $x = 3\pi/2$  تسمى حل إضافي للمعادلة الناتجة من تربيع طرفي المعادلة الأصلية ولاحظ أن المعادلة:

$$\sin^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

يتم الحصول عليها بتربيع طرفي المعادلة:  $\sin x = \cos x - 1$

ولذلك فإن  $x = 3\pi/2$  تحقق هذه المعادلة الأخيرة.



### (D) الحل باستخدام القيم التقريبية

(D) Solutions are approximate values

مسألة محلولة 13.4 حل المعادلة المثلثية الآتية:

Solved Example 13.4: Solve:

$$4 \sin x = 3$$

الحل: من المعادلة:  $4 \sin x = 3$

$$\sin x = \frac{3}{4} = 0.75 \quad \text{نستنتج أن:}$$

والزاوية المنتسبة هي 0.85 والحل بالنسبة لقيمة  $x$  هو:

$$x = 0.85 \quad \text{و} \quad x = \pi - 0.85 = 3.14 - 0.85 = 2.29$$

ولتحقيق الناتج في المعادلة الأصلية:

$$4 \sin 0.85 = 4(0.7513) = 3.0052 \approx 3 \quad \text{عند } x = 0.85$$

$$4 \sin 2.29 = 4[\sin (3.14 - 2.29)] \quad \text{عند } x = 2.29$$

$$= 4[\sin 0.85] = 4[0.7513] = 3.0052 \approx 3$$

وعند استخدام الآلة الحاسبة يمكن حساب  $\sin 2.29$  مباشرة ولذلك فإن

$$\text{ناتج: } 4 \sin 2.29 = 4(0.7513) = 3.0092 \approx 3$$

وناتج الحل لأقرب رقم مئوي دائري هو 0.85 و 2.29.

**ملاحظة** ★

عند استخدام الناتج التقريبي للتحقق من المعادلة يجب استخدام رقم التقريب  $\approx$  ليوضح أن الناتج يساوي تقريباً القيمة المطلوبة.

### (E) معادلات تشمل مضاعفات الزاوية

(E) Equation contains a multiple angle

مسألة محلولة 13.5 حل المعادلة المثلثية الآتية:

Solved Example 13.5: Solve:

$$\cos 2x - 3 \sin x + 1 = 0$$

الحل:

$$\cos 2x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$(1 - 2 \sin^2 x) - 3 \sin x + 1 = 0 \quad \text{بالتعويض عن } \cos 2x :$$

$$\begin{aligned} -2 \sin^2 x - 3 \sin x + 2 &= 0 & \text{بضرب المعادلة في } (-) \\ 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 &= 0 & \text{يكون الناتج:} \end{aligned}$$

$$(2 \sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

ومن المعادلة:  $2 \sin x - 1 = 0$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pi/6 \text{ و } x = 5\pi/6$$

ومن المعادلة:  $\sin x + 2 = 0$

$$\sin x = -2$$

لا يوجد حل للمعادلة حيث أن:  $-1 \leq \sin x \leq 1$  لكل قيم  $x$ .

ولذلك فإن حل المعادلة المطلوبة هو:  $\pi/6$  و  $5\pi/6$ .

### (F) معادلات تشمل أنصاف الزوايا

(F) Equations containing half angles

مسألة محلولة 13.6 حل المعادلة المثلثية الآتية:

Solved Example 13.5: Solve:

$$4 \sin^2 (1/2)x = 1$$

الحل:

$$4 \sin^2 (1/2)x = 1$$

$$\sin^2 (1/2)x = 1/4 \quad \text{بقسمة طرفي المعادلة على 4:}$$

$$\sin (1/2)x = \pm 1/2$$

قيم  $x$  المطلوبة في حل المعادلات المثلثية تكون خلال الفترة:  $0 \leq x < 2\pi$   
ولذلك فإن قيمة  $x$  المطلوبة في حل المعادلة في المثال السابق تكون  
خلال الفترة  $0 \leq (1/2)x < \pi$ .

من المعادلة:

$$\sin (1/2)x = 1/2 \quad (1/2)x = \pi/6 \text{ and } 5\pi/6$$

$$x = \pi/3 \text{ and } x = 5\pi/3$$

ومن المعادلة  $\sin (1/2)x = -1/2$ . لا يوجد حل للمعادلة حيث أن:

$$\sin (1/2)x \geq 0 \text{ لكل قيم } x \text{ خلال الفترة } 0 \leq (1/2)x < \pi.$$

لتكون قيم  $x$  المطلوبة هي:  $x = \pi/3$  و  $5\pi/3$ .



## قائمة المصطلحات العلمية (إنجليزي/عربي)

|                                    |                               |                      |
|------------------------------------|-------------------------------|----------------------|
| (A)                                | الإحداثيات                    | Coordinates          |
| Abscissa                           | في المستوى                    | in a plane           |
| Acute angles                       | على الدائرة                   | on a circle          |
| Adjacent side                      | على خط                        | on a line            |
| Air navigation                     | جيب التمام                    | Cosines              |
| Amplitude                          | زوايا متطابقة                 | Coterminal angles    |
| Angles and applications            | (D)                           |                      |
| الزوايا وتطبيقاتها                 | درجة                          | Degree               |
| Angular velocity                   | زوايا الانخفاض                | Depression angles    |
| Approximate numbers                | مستقيم متجه                   | Directed line        |
| Arc length                         | بعد P                         | Distance of P        |
| Area of a sector                   | (E)                           |                      |
| Area of a triangle                 | زوايا الارتفاع                | Elevation angles     |
| (B)                                | المعادلات                     | Equations            |
| Basic relationships and identities | (F)                           |                      |
| العلاقات الأساسية والمتطابقات      | زاوية الربع الأول             | First quadrant angle |
| Bearing                            | قوانين                        | Formulas             |
| الاتجاه الزاوي                     | جمع الزوايا                   | addition of angles   |
| (C)                                | مساحة المثلث                  | area of a triangle   |
| Circles                            | ضعف الزاوية                   | double-angle         |
| Cofunction                         | نصف الزاوية                   | half-angle           |
| الدوال المرافقة                    | products of sines and cosines |                      |
| Complementary angles               | حاصل ضرب الجيب وجيب التمام    |                      |
| الزوايا المتتامه                   | subtraction of angles         |                      |
| Components of a vector             | طرح الزوايا                   |                      |
| مركبات المتجه                      |                               |                      |
| Conditional equations              |                               |                      |
| المعادلات الشرطية                  |                               |                      |

|                                         |                                 |                         |
|-----------------------------------------|---------------------------------|-------------------------|
| sum and difference of sines and cosines | Number scale                    | مقياس العدد             |
|                                         | (O)                             |                         |
| قوانين الجمع والفرق للجيب وجيب التمام   | Oblique triangles               | المثلثات المائلة        |
| (G)                                     | Omega                           | العدد التخيلي           |
| General angles                          | Opposite side                   | الضلع المقابل           |
| Given function value angles             | Ordinate                        | إحداثي                  |
| قيمة الزوايا للدالة                     | Origin                          | نقطة الأصل              |
| Graphs                                  |                                 |                         |
|                                         | (P)                             |                         |
| (H)                                     | Periodic functions              | الدوال الدورية          |
| Horizontal and vertical shifts          | Plane angle                     | زاوية مستوية            |
| نقل المحاور الأفقية والرأسية            | Practical applications          | تطبيقات عملية           |
| Hypotenuse                              | Principal-value range           |                         |
| (I)                                     |                                 | القيمة الأساسية للمدى   |
| Identities                              | Pythagorean relationships       |                         |
| المتطابقات                              |                                 | علاقات فيثاغورث         |
| Inclined plane                          |                                 |                         |
| المستوى المائل                          |                                 |                         |
| Inverses of trigonometric functions     |                                 |                         |
|                                         | (Q)                             |                         |
| الدوال المثلثية العكسية                 | Quadrantal angles               | زوايا ربعية             |
| (L)                                     | Quadrant signs of the functions |                         |
| Law of cosines                          |                                 | الإشارات الربعية للدوال |
| قوانين جيب التمام                       |                                 |                         |
| Law of sines                            | Quotient relationships          |                         |
| قوانين الجيب                            |                                 |                         |
| Line representations                    |                                 | علاقات ناتج القسمة      |
| تمثيل الخط المستقيم                     |                                 |                         |
| (M)                                     | (R)                             |                         |
|                                         | Radian                          | دائري                   |
| Measures of angles                      | Radius vector of P              |                         |
| قياس الزوايا                            |                                 |                         |
| Minute                                  |                                 | المتجه نصف القطري لنقطة |
| دقيقة                                   |                                 |                         |
| (N)                                     | Reciprocal relationships        |                         |
| Negative angles                         |                                 | علاقات مقلوب النسب      |
| الزوايا السالبة                         |                                 |                         |

|                                                 |                                           |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Rectangular coordinate system                   | Trigonometric functions of an acute angle |
| نظم الإحداثيات الكارتيزية                       | الدوال المثلثية للزوايا الحادة            |
| Reduction to functions of positive acute angles | Trigonometric functions of two angles     |
| الاختصار لدوال الزوايا الموجبة الحادة           | الدوال المثلثية لزاويتين                  |
| Reference angles                                | (U)                                       |
| الزوايا المنتسبة                                | Undefined functions                       |
| Resultant                                       | الدوال غير المعرفة                        |
| المحصلة                                         | (V)                                       |
| (S)                                             | Values for functions                      |
| Simplification of expressions                   | قيمة الدوال                               |
| تبسيط التعبيرات                                 | Vectors                                   |
| Sine                                            | المتجهات                                  |
| جيب                                             | Vector sum                                |
| Sine curves                                     | جمع المتجهات                              |
| منحنيات الجيب                                   | Verifying identities                      |
| Standard position angles                        | تحقيق المتطابقات                          |
| الوضع القياسي للزوايا                           | Vertex                                    |
| (T)                                             | الرأس                                     |
| Trigonometric equations                         | (X)                                       |
| المعادلات المثلثية                              | X coordinate                              |
| Trigonometric functions of a general angle      | (Y)                                       |
| الدوال المثلثية للزوايا العامة                  | Y coordinate                              |
|                                                 | الإحداثي الصادي                           |







ف: 140/2008 ت: 1/12/2008



## When you don't have the time ... but you still need the grade!

If your life is too busy to spend hours ploughing through weighty textbooks, and you need every study minute to count, *Schaum's Easy Outline* is perfect for you! This super-condensed, high-torque study guide gives you what you need to know in a fraction of the time.

### SUPER-IMPACT

Built for quick, effective study, this *Easy Outline* packs exciting new learning tools that make mastering trigonometry fast, fun—and almost automatic.

### SPEEDY

Quick-study experts slashed the time you need to spend with your books by reducing trigonometry to the essentials the professor expects you to know. This *Easy Outline* is perfect for test preparation, pre-exam review, and handling those last-minute cram situations.

### HI-QUALITY

*Easy Outlines* give you 100% of the authority of Schaum's full-sized guides, known around the world for the highest academic standards.

### BACKPACK-ABLE STUDY POWER

Compact and portable, this *Easy Outline* lets you study trigonometry anywhere.

### SCHAUM'S GETS THE GRADE!

line. *Schaum's Easy Outlines* give you what you want—better work, and more free time!

trigonometry the easy way. *Schaum's Easy Outline of Trigonometry* trigonometry with plenty of illustrations, memory joggers, and the orption teaching techniques. Backed by Schaum's reputation for ty, this is the study guide students turn to and trust. Students s is going to be there for them when they need it!

dy tips

• Student-friendly style

At a glance tables

• Perfect for test prep



Biblioteca Alexandrina



0650559

The McGraw-Hill Companies

Visit us at: [www.books.mcgraw-hill.com](http://www.books.mcgraw-hill.com)

rabric version by:



International House for Cultural Investments S.A.E.

ISBN 977-282-145-7



6

222006

605049